



IX Campeonato Escolar de Matemática

PRIMERA FECHA - 16 DE ABRIL DE 2011

SOLUCIONES PRUEBAS INDIVIDUALES

NIVEL 1

1. En la multiplicación

$$\begin{array}{r} ABC \\ \times D7 \\ \hline * * * \\ * * * \\ \hline 6157 \end{array}$$

Donde A, B, C y D son dígitos y $A \neq 0$. Determinar la suma de los números no señalados (o sea las letras y las estrellas).

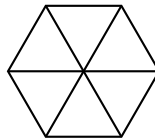
Solución.

Notemos que $6157 = 131 \times 47$ (es una descomposición en factores primos), luego $D = 4$ y $ABC = 131$. Por lo tanto:

$$\begin{array}{r} ABC \\ \times D7 \\ \hline 917 \\ 524 \\ \hline 6157 \end{array}$$

Luego $1 + 3 + 1 + 4 + 9 + 1 + 7 + 5 + 2 + 4 = 37$

2. Usando palitos de fósforos de 1 cm. de longitud, podemos construir un hexágono regular, formado por seis triángulos equiláteros de lado 1 cm., como muestra la figura.

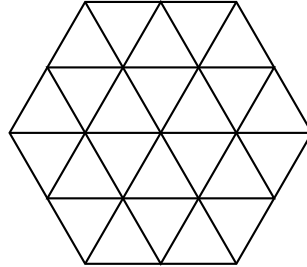


Juntando más palitos a este hexágono y sin mover los que ya están, queremos obtener otro hexágono regular también formado por triángulos equiláteros de lado 1 cm. Determine cuántos palitos deben ser agregados a la figura original para que el área del nuevo hexágono sea:

- a) 4 veces el área de la figura original.
- b) 9 veces el área de la figura original.

Solución 1

a) El nuevo hexágono es:

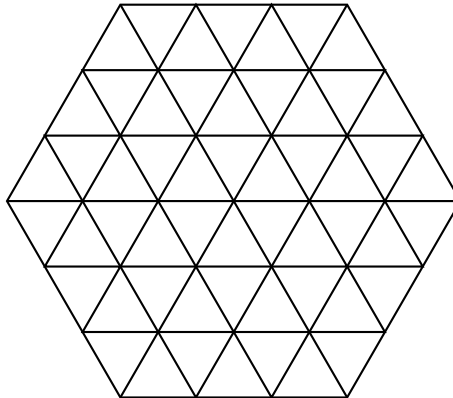


y puede ser obtenido en dos pasos:

- 1) Ampliar la figura al doble de su tamaño original (el número de palitos de fósforo usados aumenta en $12 \cdot 2 - 12$)
- 2) Agregar 6 triángulos equiláteros de lado 1 cm. (el número de palitos de fósforo usados aumenta en $6 \cdot 3$)

Entonces fueron agregados $12 \cdot 2 - 12 + 6 \cdot 3 = 30$ palitos de fósforo.

b) El nuevo hexágono es:



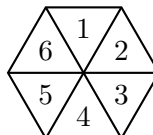
y puede ser obtenido en dos pasos:

- 1) Ampliar la figura al triple de su tamaño original (el número de palitos de fósforo usados aumenta en $12 \cdot 3 - 12$)
- 2) Agregar $6 \cdot 3$ triángulos equiláteros de lado 1 cm. (el número de palitos de fósforo usados aumenta en $6 \cdot 3 \cdot 3$)

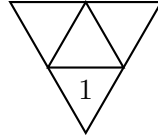
Entonces fueron agregados $12 \cdot 3 - 12 + 6 \cdot 3 \cdot 3 = 78$ palitos de fósforo.

Solución 2

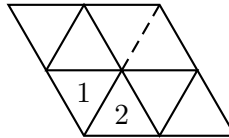
En la figura numeramos los triángulos:



- a) Por cada triángulo i ($i = 1, \dots, 6$) son agregados 3 triángulos equiláteros de lado 1 cm., formando otro triángulo equilátero de lado 2 cm.

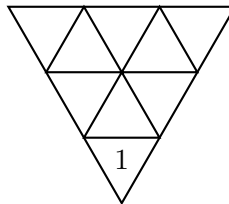


Considerando dos triángulos consecutivos (por ejemplo, 1 y 2), hay un palito repetido

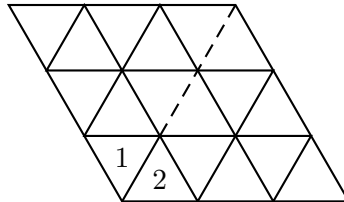


Entonces por cada triángulo i son agregados 5 palitos, por lo tanto fueron agregados 30 palitos.

- b) Por cada triángulo i ($i = 1, \dots, 6$) son agregados 8 triángulos equiláteros de lado 1 cm., formando otro triángulo equilátero de lado 3 cm.



Considerando dos triángulos consecutivos (por ejemplo, 1 y 2), hay dos palitos repetidos



Entonces por cada triángulo i son agregados 13 palitos, por lo tanto fueron agregados 78 palitos.

Solución 3 Puede ocurrir que los alumnos construyan las figuras indicadas para las partes a y b, contar en cada una el número de palitos de fósforos y luego restar 12(el número de palitos de fósforos de la figura inicial).

NIVEL 2

1. En un club se reúnen habitualmente cuatro amigos. Sebastián, Gerald, Jaime y René. Ellos tienen distintos animales, autos y profesiones. Además, cada uno practica un deporte distinto. Se sabe que Sebastián es profesor y tiene un perro. El que conduce un auto azul juega basketball, Gerald conduce el auto rojo, el físico practica natación, el que juega tenis tiene un gato y no conduce un auto blanco. René es ingeniero, tiene un auto negro y no juega tenis. Si el matemático no tiene un loro ¿De quién es el ornitorrinco y quién practica fútbol? (considere que son personas distintas).

Solución.

Primero completamos la tabla con los datos.

	Sebastián	Gerald	Jaime	René
Profesión	Profesor			Ingeniero
Animal	Perro			
Color auto		Rojo		Negro
Deporte				

Luego tomamos los datos que nos da el problema que son:

- René no juega tenis.
- El matemático no tiene loro.
- El que tiene auto azul juega basketball.
- El que juega tenis tiene gato y no conduce un auto blanco.
- El físico practica natación.
- El que tiene el ornitorrinco no juega fútbol.

1) Analizando la tabla nos encontramos con dos posibilidades a seguir:

Primero supongamos que Gerald es Físico, entonces practica natación. Luego, Jaime es matemático. Sabemos que el que juega tenis tiene un gato y no conduce un auto blanco. Dado que René no juega tenis, podemos afirmar que Jaime juega tenis y tiene un gato. Así, Sebastián tiene un auto blanco.

Por descarte Jaime tiene el auto azul, pero como se sabe que quien tiene el auto azul juega basketball, tenemos una contradicción y debemos suponer que Gerald es matemático.

	Sebastián	Gerald	Jaime	René
Profesión	Profesor	Físico	Matemático	Ingeniero
Animal	Perro		Gato	
Color auto	Blanco	Rojo		Negro
Deporte		Natación	Tenis	

2) Ahora suponiendo que Gerald es matemático concluimos que Jaime es físico.

Nos dicen que el físico practica natación. Luego Jaime practica natación.

Ahora bien, quien juega tenis tiene un gato y no conduce un auto blanco. Nos quedan Gerald y René, pero como René no juega tenis podemos decir que Gerald juega tenis y tiene un gato.

También sabemos que quien tiene un auto azul juega basketball.

Por descarte concluimos que Jaime tiene un auto blanco y un ornitorrinco.

Y por último René tiene el loro y juega Fútbol.

	Sebastián	Gerald	Jaime	René
Profesión	Profesor	Matemático	Físico	Ingeniero
Animal	Perro	Gato	Ornitorrinco	Loro
Color auto	Azul	Rojo	Blanco	Negro
Deporte	Basketball	Tenis	Natación	Futbol

Finalmente, tenemos que el ornitorrinco es de Jaime y René juega Fútbol.

2. Si $a + b + c = 0$, ¿Cuánto es el valor de $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$?

Solución.

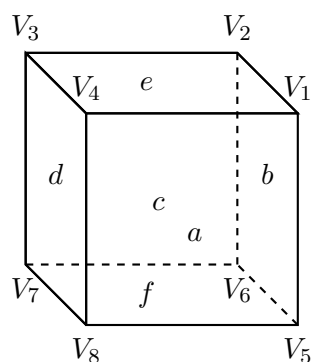
$$\begin{aligned} \text{Si } a + b + c = 0 &\implies a + b = -c \\ &\implies b + c = -a \\ &\implies a + c = -b \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} = \frac{-c}{c} + \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} = (-1) + (-1) + (-1) = -3$$

NIVEL 3

1. Se tiene un cubo donde a cada cara se le asigna un número natural y a cada vértice se le asigna el producto del valor de las 3 caras adyacentes a este. Se sabe que la suma de todos los vértices es 627, determinar la suma de los valores asignados a las caras.

Solución.



Sean a, b, c, d, e, f los números asignados a cada cara del cubo.

Luego, el valor asignado a cada vértice será:

$$\begin{aligned} V_1 &= abe & V_5 &= abf \\ V_2 &= bce & V_6 &= bcf \\ V_3 &= dce & V_7 &= dcf \\ V_4 &= ade & V_8 &= adf \end{aligned}$$

Como sabemos que $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 = 627$. Tenemos:

$$\begin{aligned} abe + bce + dce + ade + abf + bcf + dcf + adf &= 627 \\ e(ab + bc + dc + ad) + f(ab + bc + dc + ad) &= 627 \\ (e + f)(ab + bc + dc + ad) &= 627 \\ (e + f)(b(a + c) + d(c + a)) &= 627 \\ (e + f)(a + c)(b + d) &= 627 \end{aligned}$$

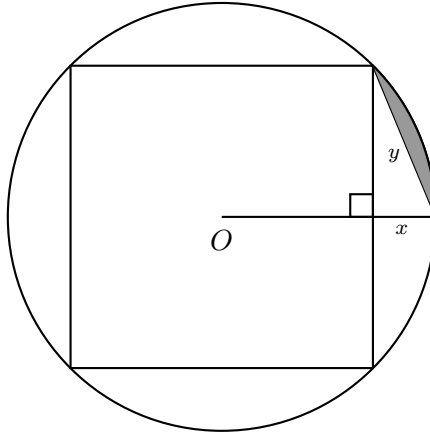
Ahora notemos que la descomposición en factores primos de 627 es: $627 = 3 \cdot 11 \cdot 19 \implies (e + f)(a + c)(b + d) = 3 \cdot 11 \cdot 19$. Supongamos que $(e + f) = 3$, $(a + c) = 11$ y $(b + d) = 19$ (lo que podemos hacer ya que $(e + f)$, $(a + c)$ y $(b + d)$ son mayores que uno).

$$\text{Luego } a + b + c + d + e + f = 3 + 11 + 19 = 33$$

2. En la siguiente figura, un cuadrado de lado a está inscrito en una circunferencia de centro O .

a) Determinar x e y .

b) ¿Qué porcentaje del área del círculo está achurada?



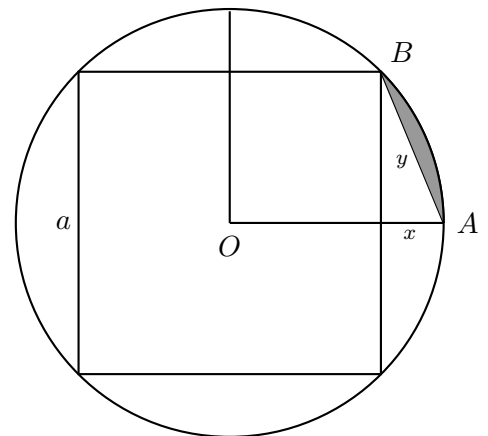
Solución.

El radio de la circunferencia está dado por:

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Luego x va a ser:

$$\begin{aligned} x &= a\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} \\ &= a\frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{aligned}$$



Por teorema de Pitágoras se puede escribir y como:

$$y^2 = \left(a\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$y^2 = a^2\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$y^2 = \frac{a^2}{4} [(\sqrt{2}-1)^2 + 1]$$

$$y = \frac{a}{2}\sqrt{2-2\sqrt{2}+1+1}$$

$$y = \frac{a}{2}\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

El área del círculo será:

$$A_{\odot} = \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{2}$$

El área del triángulo $\triangle OAB$ es:

$$A_{\triangle} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{8}$$

Luego el área achurada es:

$$A_{Achurada} = \left(\frac{1}{4}A_{\odot} - 2A_{\triangle} \right) \frac{1}{2} = \left(\frac{\pi a^2}{8} - \frac{2a^2\sqrt{2}}{8} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{16} (\pi - 2\sqrt{2})$$

El porcentaje, X , del área del círculo que está achurada satisface la ecuación:

$$\frac{\frac{\pi a^2}{2}}{\frac{a^2(\pi - 2\sqrt{2})}{16}} = \frac{100}{X}$$

$$X = \frac{a^2(\pi - 2\sqrt{2})}{16} \cdot \frac{2}{\pi a^2} \cdot 100$$

$$X = \frac{25(\pi - 2\sqrt{2})}{2\pi}$$

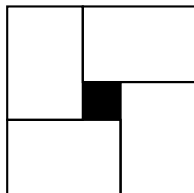
Finalmente el porcentaje del área del círculo que está achurada es: $\frac{25(\pi - 2\sqrt{2})}{2\pi} \%$

NIVEL 4

- Se tiene un tablero cuadrulado con 2011 filas y 2011 columnas, al cual se le ha retirado la casilla central. Se dispone también de una gran cantidad de fichas con forma de rectángulo de dimensiones $1 \times n$ (cada ficha cubre exactamente n casillas). El objetivo es cubrir el tablero menos el agujero central, usando estas fichas, sin superponerlas y sin salir de los límites del tablero.
 - Pruebe que esto es posible para $n = 1005$ (describa cómo ubicar las fichas).
 - Pruebe que esto es posible para $n = 1006$ (describa cómo ubicar las fichas).
 - Pruebe que esto es imposible para todo $n \geq 1007$.

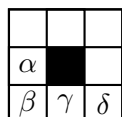
Solución.

Observe que el tablero es la unión de cuatro rectángulos de dimensiones 1005×1006 :



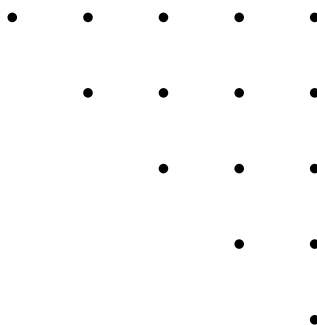
Cada rectángulo de dimensiones 1005×1006 puede ser cubierto independientemente con fichas 1×1005 y con fichas 1×1006 (todas con igual orientación, horizontal o vertical dependiendo del caso), de esta manera es fácil exhibir una solución para las partes a) y b)

Para la parte c), considere las cuatro casillas vecinas al “agujero central” que se indican en la figura abajo:



La ficha F_1 que cubre la casilla γ no puede estar en posición vertical porque parte de ella saldría del tablero, entonces debe estar en posición horizontal. Como $n \geq 1007$, entonces F_1 cubre las casillas β, γ, δ . Al intentar cubrir la casilla α , observamos que esto es imposible, porque el “agujero central” y la ficha F_1 obligan a poner el extremo de una ficha F_2 en la casilla α , de este modo el otro extremo de F_2 queda fuera del tablero. Por lo tanto es imposible cubrir el tablero en este caso.

2. ¿Cuántos triángulos se pueden construir con sus tres vértices en el reticulado de la figura?

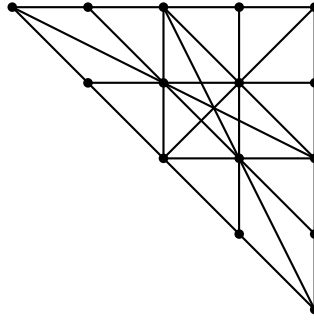


Solución.

Las combinaciones posibles son:

$$\begin{aligned}
 C_3^{15} &= \binom{15}{3} = \frac{15!}{(15-3)! \cdot 3!} \\
 &= 455
 \end{aligned}$$

Sirven todas las combinaciones de puntos, menos las que son colineales. Observamos que en las líneas que hay cinco puntos van a existir 10 triángulos imposibles de formar; en las líneas que hay 4 puntos habrán 4 triángulos imposibles de formar y en las líneas que hay 3 puntos habrá un triángulo imposible de formar. Como hay tres líneas de cinco puntos, tres líneas de cuatro puntos y 6 líneas de tres puntos (ver figura siguiente) entonces concluimos que hay 48 triángulos imposibles de formar.



$$455 - 48 = 407$$

Se pueden formar 407 triángulos.