

IX Campeonato Escolar de Matemática

PRIMERA FECHA - 16 DE ABRIL DE 2011

SOLUCIONES PRUEBA GRUPAL.

Observación:

Para la lectura de las respuestas de esta prueba es necesario que los dibujos sean leídos de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.

En esta oportunidad, nos enfocaremos en tratar de modelar la vida. La vida en sus distintas dimensiones y como se ha comportado a lo largo de la historia. Sus continuos vaivenes entre el espacio y el tiempo. En resumidas cuentas, la historia de la lucha por la supervivencia.

Como sabrán, por ahora, sólo sabemos a ciencia cierta que la vida se abrió camino en un lugar pequeño del universo, la Tierra. Este punto de inicio nos limita espacialmente, de modo que no podemos expandirnos infinitamente por el cosmos (por ahora...). Para representar el espacio vital ocuparemos tableros cuadrículados.

En las primeras preguntas el tamaño de cada tablero corresponde con el del dibujo, representando el espacio habitable por la especie en cada paso. En cambio, en las otras ocuparemos tableros lo suficientemente grandes para que las figuras no toquen las paredes. Así, en esas preguntas no nos limitaremos por los bordes de los tableros.

Podemos partir por pensar en cómo sería la vida si no tuviésemos mucho espacio. Y de hecho, si solo pudiéramos vivir uno al lado del otro horizontalmente entonces, y a medida que pasa el tiempo, la convivencia entre individuos tomaría patrones, y lograríamos tener ciertas reglas generales. Así proponemos, en esta prueba, modelar esta situación bajo algunas reglas, las cuales dependen de la cantidad de vecinos que cada espacio tenga.

Llamaremos X a la especie y la graficaremos con un círculo relleno de color negro. En lo que sigue, y dada una casilla del tablero, llamamos *vecinos* a los individuos que habitan las casillas adyacentes.

Dada una casilla, si la cantidad de vecinos:

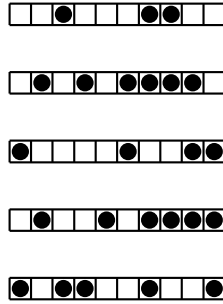
- es 0, el individuo en esa casilla muere de soledad
- es 1, en este lugar nace un individuo o sobrevive, si existía vida
- es 2 y existe un individuo, este muere por sobrepoblación

Dada una configuración inicial (esto es, un tablero con vida en algunas casillas), pasamos de un estado al siguiente verificando las condiciones para todas las casillas simultáneamente. Llamamos a este proceso una iteración del proceso de la vida.

1. Dada la siguiente configuración, realicen 4 iteraciones del proceso de la vida.



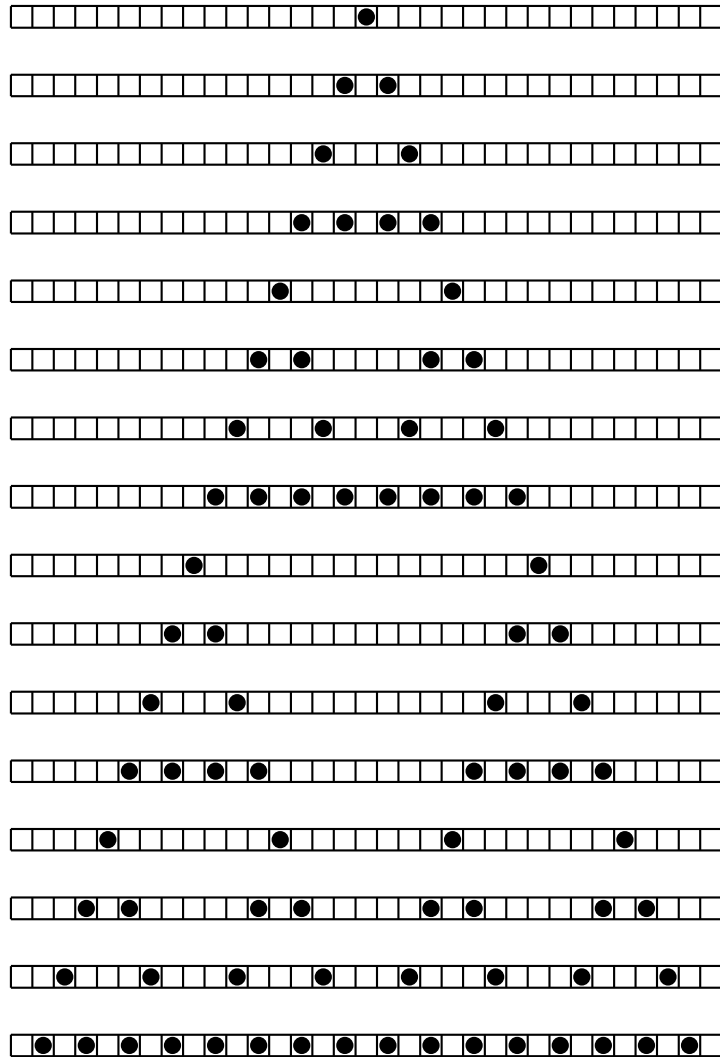
Solución:



2. A partir del siguiente esquema realicen 15 iteraciones para el proceso de la vida.



Solución:

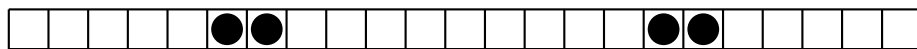


A lo largo de los años el mundo ha cambiado debido a que sólo el mejor preparado ha sido capaz de sobrevivir. Esto no sólo ocurre con distintas especies, si no que, dentro de una misma especie, debido a las mutaciones, se producen nuevos individuos con capacidades especiales. Algunas mutaciones logran mejorar las especies, pero otras no. Así, la supervivencia se rige por la interacción entre individuos de estas dos especies.

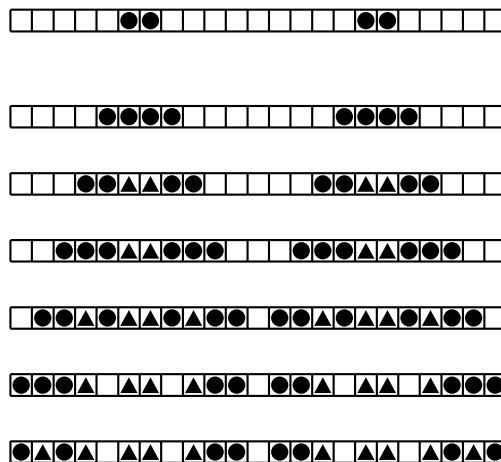
Para modelar lo anterior, probemos lo siguiente. A la especie obtenida de luego de la mutación la llamaremos Y y la graficaremos con un triángulo relleno de color negro, y cambiaremos un poco las reglas. Dada una casilla:

- Si la cantidad de vecinos de un individuo X del tipo X es
 - es igual a 0, este individuo muere de soledad.
 - es igual a 1, sobrevive el que estaba allí, del tipo X.
 - es igual a 2, este individuo muta a Y.
- Si la cantidad de vecinos de un individuo Y
 - es igual 0, este espécimen muere de soledad.
 - es igual a 1, sobrevive un individuo Y, independiente del tipo de vecino.
 - es igual a 2 del tipo X, sobrevive.
 - es igual a 2 del tipo Y, muere por sobrepoblación.
 - es igual a 2, pero con un vecino de cada tipo, sobrevive.
- Si la cantidad de vecinos de un espacio vacío
 - es igual 0 o 2 con vecinos de la misma especie, no pasa nada.
 - es igual a 2 con vecinos distintos, nace un individuo Y.
 - es igual a 1, nace un individuo del tipo del vecino.

3. Iteren 6 veces a partir de la siguiente configuración inicial:



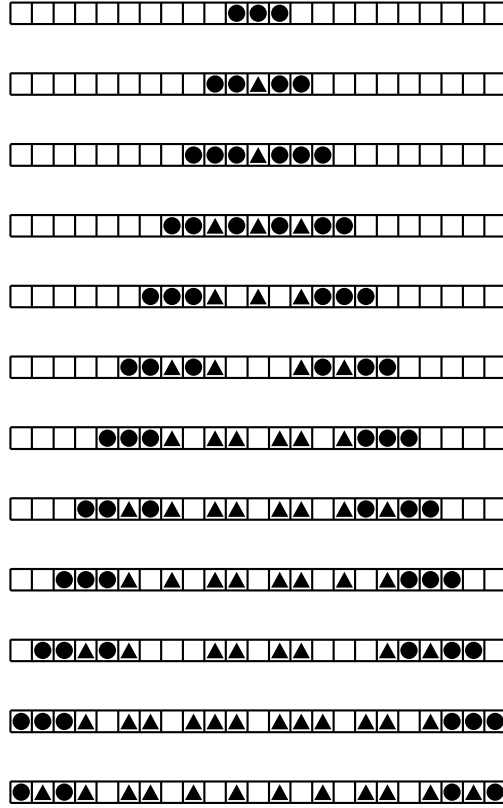
Solución:



4. Realicen 11 iteraciones a partir del siguiente esquema.



Solución:

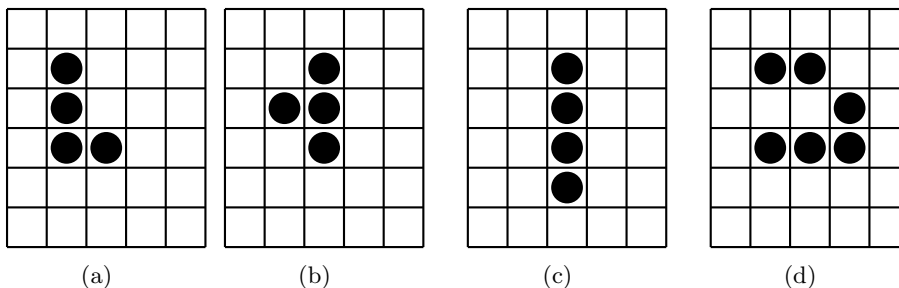


Dejaremos las mutaciones de lado volviendo a una especie estable, para dar un salto en otra dirección. Afortunadamente, la vida no la vivimos en una dimensión, y por ello queremos hacer algo un tanto más realista, trabajando en tableros bidimensionales. En estos tableros la vida es un poco más complicada, y nos infunden nuevas reglas para la supervivencia de los individuos. Incluso, a partir de este punto, todos los tableros tendrán un tamaño indefinido, siendo lo suficientemente grandes para que las figuras no toquen los bordes (el tamaño del tablero en cada dibujo no es relevante para el desarrollo del ejercicio). Al estar en un tablero bidimensional, debemos considerar a los vecinos de forma distinta: dada una casilla, decimos que sus vecinos son los habitantes de las ocho casillas circundantes (arriba, abajo, izquierda, derecha, diagonales). Definido esto, empezaremos con una nueva definición del proceso de vida. Así, si la cantidad de vecinos X de una casilla:

- es menor o igual a 1, el individuo muere de soledad
- es igual a 2, si existe un individuo éste sobrevive
- es igual a 3, en ese espacio nace un espécimen o sobrevive el que estaba allí
- es igual o mayor a 4, el individuo muere por sobrepoblación

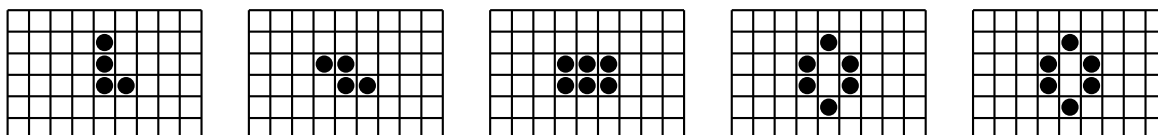
Con este nuevo modelo podremos estudiar el comportamiento de ciertas poblaciones. En especial su estabilidad. Esta característica se refiere a la posibilidad de que ciertas poblaciones se mantengan durante el tiempo, en especial la cantidad de sus integrantes. Es así, que una figura es *estable* si después de cierta cantidad de iteraciones toma una forma definida o que se repite de manera periódica.

5. Indiquen si las siguientes figuras son estables. Si lo son, dibujen el estado final o indiquen el periodo de repetición la figura.

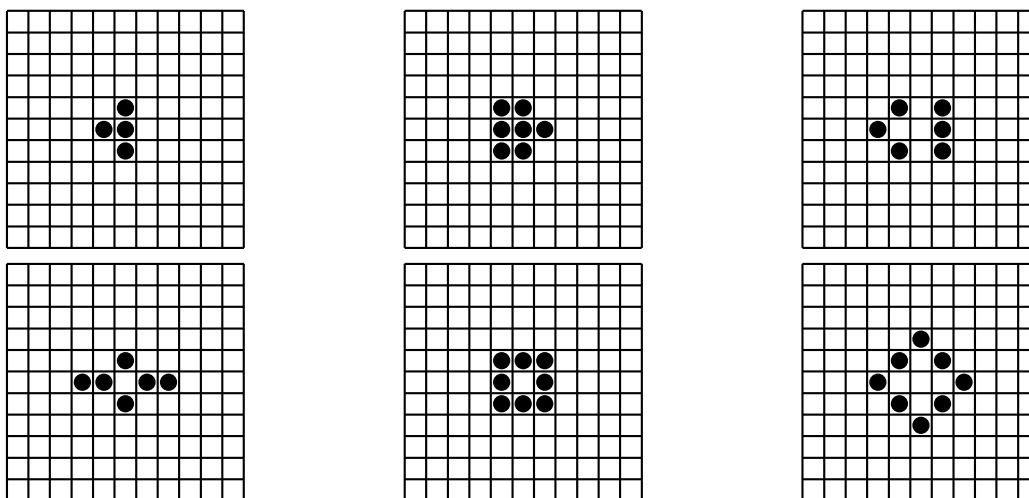


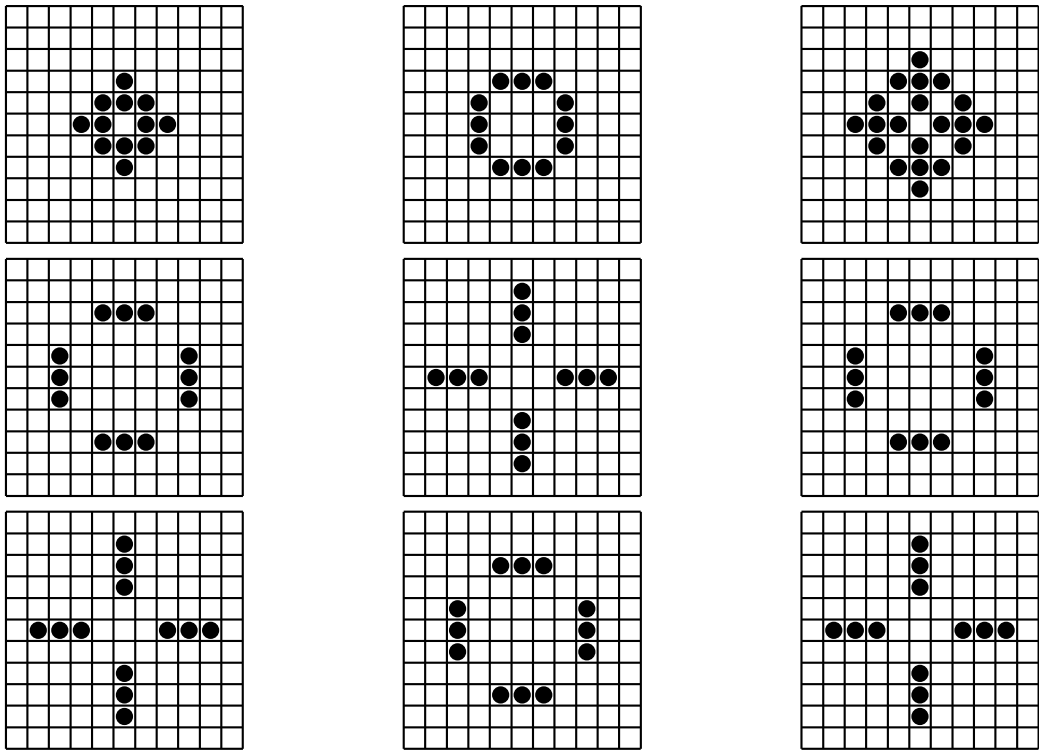
Solución:

a)

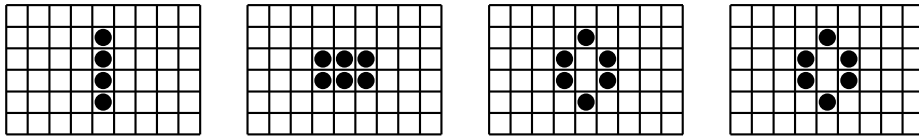


b)

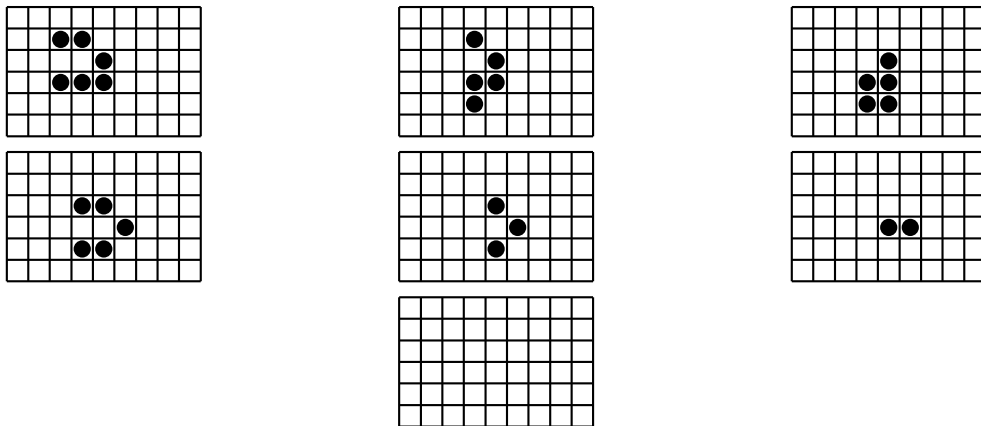




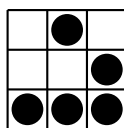
c)



d)



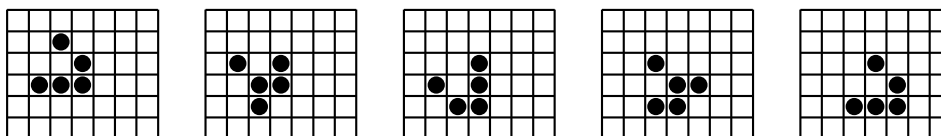
6. Una formación Glider es una formación capaz de moverse durante el paso del tiempo, tal como la que se muestra a continuación.



¿Después de cuantas iteraciones logra avanzar la figura recuperando su forma original? No indiquen solamente el número de pasos, si no que también, describan su movimiento con diagramas. Además, ¿Qué pasa si la figura es rotada en 90° , 180° ó 270° ? ¿Se sigue moviendo?

Solución:

Bastan 4 iteraciones para que el Glider vuelva a la forma original. Esto se ve claramente en el siguiente proceso:



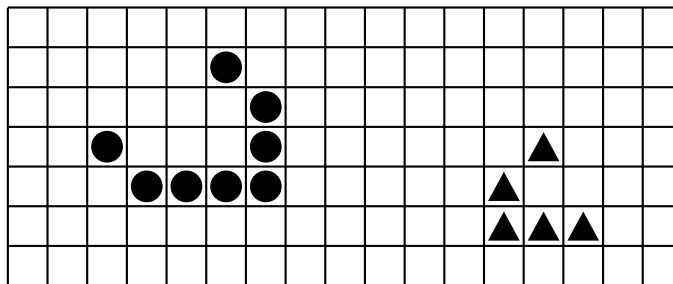
El Glider no se ve afectado por rotaciones, salvo que la dirección en la que se mueve se ve alterada.

Naturalmente tiende a existir la rivalidad entre ciertas poblaciones. Esto a quedado claro a través de la historia, ejemplificado en las distintas guerras de la humanidad. Pero no solo el número de individuos es importante, a veces la estrategia logra dar la victoria al grupo de menos integrantes.

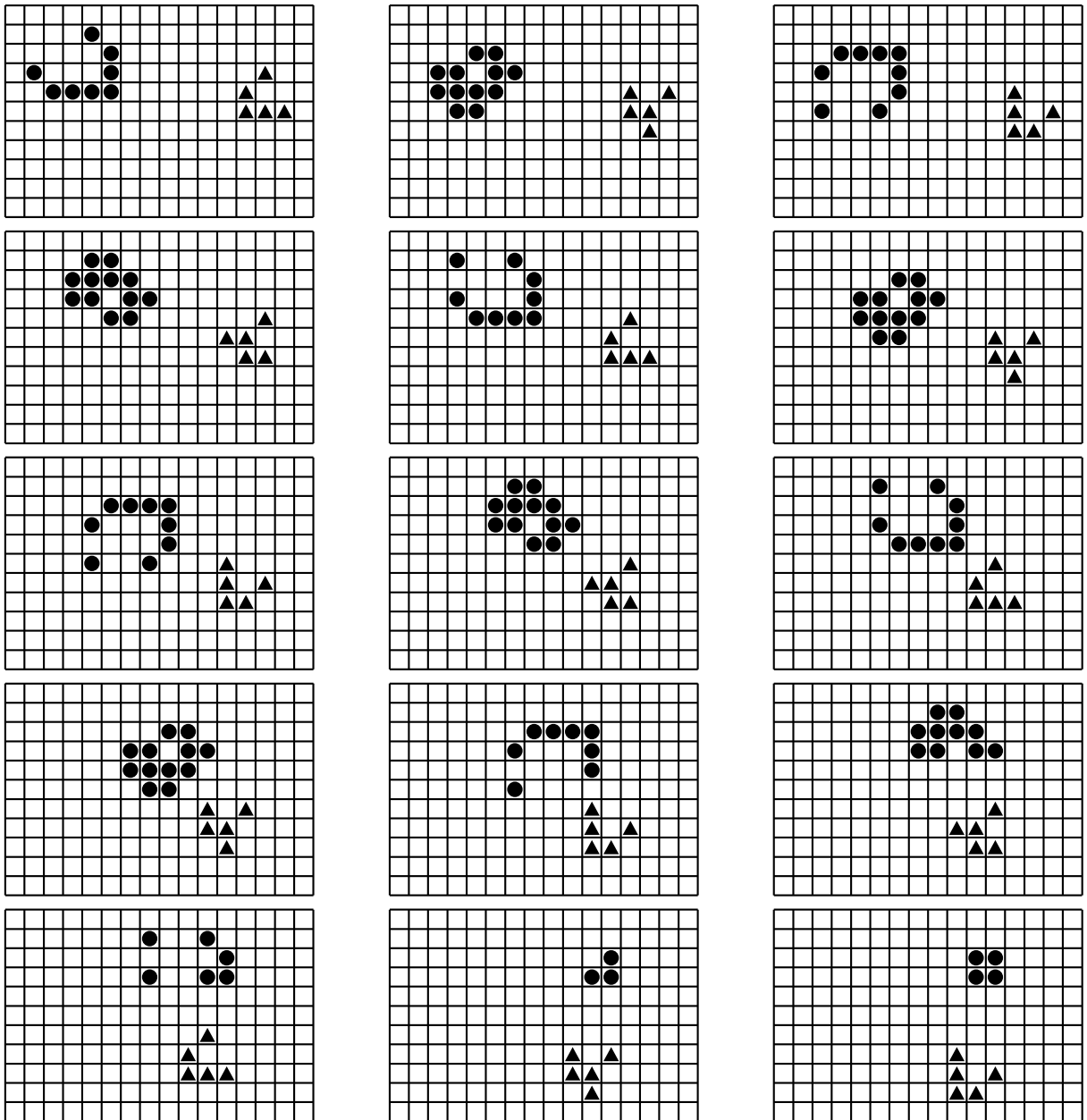
Para poder analizar el choque poblacional daremos un poco de realismo a estas mismas. Así, tendremos dos grupos X e Y, los cuales estarán representados con círculos y triángulos rellenos de color negro, respectivamente. Estas poblaciones tendrán las mismas reglas de la parte anterior sólo que enfrentadas. Así, para obtener la cantidad de vecinos de una casilla, los vecinos X se cuentan sumando +1 y los vecinos Y se cuentan sumando -1, obteniendo una suma de la vecindad. Por tanto, si dicha suma:

- es menor o igual a -4 , el individuo muere por sobrepoblación Y.
- es igual a -3 , en esa casilla habrá un individuo Y.
- es igual a -2 y está habitada por un Y, este individuo sobrevive.
- es igual a -2 y está habitada por un X, este individuo muere.
- está entre -1 y $+1$, esa casilla quedará vacía.
- es igual a 2 y está habitada por un X, este individuo sobrevive.
- es igual a 2 y está habitada por un Y, este individuo muere.
- es igual a $+3$, en esa casilla habrá un individuo X.
- es mayor o igual a $+4$, el individuo muere por sobrepoblación X.

7. Realicen a lo más 20 iteraciones del siguiente tablero, de modo de observar el choque entre las distintas especies. Si el proceso se estabiliza, no es necesario que continúen con el proceso y justifiquen porqué esa configuración es estable.



Solución:



La configuración final se logra a las 14 iteraciones. Esta es estable ya que la especie X se convierte en un cuadrado el cual ya no variará al pasar las iteraciones, mientras que la especie Y sigue en su formación glider.

8. Muestren una configuración inicial en la cual dos grupos (uno de cada especie) en formación Glider choquen, y luego del paso de cierto tiempo se establezcan en forma y posición (Se incluye aquellas configuraciones en que partes quedan alternando de un ciclo al siguiente).

Solución:

Una de las soluciones a este problema es:

