Unidad 4

Otro paso en el estudio de las probabilidades

Contenidos

a. Variable aleatoria: estudio y experimentación en casos concretos. Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico.

b. Relación entre la probabilidad y la frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Uso de programas computacionales para la simulación de experimentos aleatorios.

c. Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades. Probabilidad condicionada.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

Reconocen variables aleatorias y las interpretan de acuerdo a los contextos en que se presentan.

Conocen empíricamente la Ley de los Grandes Números y relacionan la frecuencia relativa con la probabilidad de un suceso.

Resuelven problemas que involucran el cálculo de probabilidad condicionada en situaciones sencillas.

Distinguen entre sucesos equiprobables y no equiprobables.

Orientaciones didácticas

La palabra probabilidad pertenece al vocabulario corriente de las personas. Los términos aleatorio, azar, incierto, predecible o impredecible, seguro e inseguro se utilizan usualmente y en ámbitos tan diversos como la economía, la meteorología, el deporte, el transporte, las ciencias básicas y sociales, la medicina y naturalmente cuando se trata de juegos de azar. Por ello, es conveniente distinguir que a veces se utiliza para indicar una creencia subjetiva, en otros casos una estimación empírica o bien, un conocimiento teórico.

Uno de los conceptos más fundamentales en Teoría de Probabilidades es el de variable aleatoria. En el contexto del presente programa de estudios, entenderemos como variable aleatoria a cantidades o magnitudes susceptibles de variar azarosamente. Más precisamente, cuando se asocia un único número x con cada resultado posible de un experimento aleatorio, el número x recibe el nombre de variable aleatoria. Por ejemplo, supongamos que el experimento consiste en escoger una manzana al azar de un árbol y pesarla. El peso será una variable (de interés) asociada a cada manzana, y como la manzana fue escogida aleatoriamente, su peso será una variable aleatoria. Es claro que una vez escogida una manzana específica, el peso que ella tenga, digamos 150 gramos, no es aleatorio. Cabe señalar que el mismo experimento aleatorio permite definir diferentes variables aleatorias. En el ejemplo, en lugar del peso de la manzana, podría determinarse su volumen.

Algunas variables aleatorias que aparecen en la vida diaria y que sería interesante analizar con los alumnos y alumnas son: número de accidentes carreteros ocurridos en un fin de semana escogido al azar, número de hermanos que tiene un estudiante cualquiera, número de años que vivirá una persona nacida en 1981, número de artículos defectuosos producidos en una fábrica cualquiera, etc.

En el Programa de Segundo Año Medio, se estudió, esencialmente, el caso de la probabilidad teórica, que se basa en la idea de que a ciertos eventos es posible calcular su probabilidad *a priori*, dadas ciertas condiciones de simetría del experimento. Así, si un experimento tiene n resultados posibles, todos con igual probabilidad, podemos asignar la probabilidad de$1/n$ a cada resultado posible. Sin embargo, en algunas experiencias, como las que se sugieren en el Ejemplo A de la Actividad 1 de la presente unidad, las probabilidades de los posibles resultados del experimento no se pueden determinar *a priori* y deben ser estimadas realizando la experiencia.

Para poder definir la noción de *probabilidad experimental* será necesario definir la *frecuencia relativa del resultado A de un experimento,* como el cuociente entre el número de veces que efectivamente ocurre A sobre el número de veces que se realiza el experimento. Se podrá decir entonces que la *probabilidad experimental del suceso A* se aproximará al valor de esta frecuencia relativa, cuando el experimento se realiza una gran cantidad de veces. Ello permitirá una buena aproximación para una comprensión intuitiva de la Ley de los Grandes Números.

Otro de los aspectos que se estudia en la presente unidad es la independencia de sucesos y la probabilidad condicionada. En esta dirección, es importante que las alumnas y alumnos comprendan que la probabilidad de un suceso puede cambiar si se dispone de nueva información, y este hecho se modela por la noción de probabilidad condicionada. Esto permite formalizar la idea de que la probabilidad depende de la información. Por ejemplo, si en el lanzamiento de un dado se desea saber la probabilidad de que salga 2, se sabe, por lo estudiado en Segundo Año Medio, que esta probabilidad es 1/6. Sin embargo, si se sabe que ha salido un número menor que 4, entonces, con esta nueva información, la probabilidad de obtener un 2 será 1/3.

En este programa, se propone el análisis de juegos y fenómenos aleatorios sin enfatizar el uso de vocabulario específico ni de simbolización formal. Es posible desarrollar los ejemplos planteados realizando directamente, en cada situación, los respectivos cálculos de probabilidades. Debiera ser claro que si dos sucesos *A* y *B* son independientes, entonces la probabilidad de que ocurra el suceso *A* sabiendo que ha ocurrido *B* debiera ser igual a la probabilidad que ocurra el suceso *A*, es decir,

P(ocurra A sabiendo que ha ocurrido B) = P(ocurra A).

A continuación, puede constatarse que, si *A* y *B* son dos sucesos dependientes, entonces la probabilidad que ocurra el suceso *A* sabiendo que el suceso *B* ha ocurrido, se calcula del siguiente modo:

P(ocurra A sabiendo que ha ocurrido B) = P(ocurra A y B)/P(B), siempre que *P(B)* sea diferente de 0.

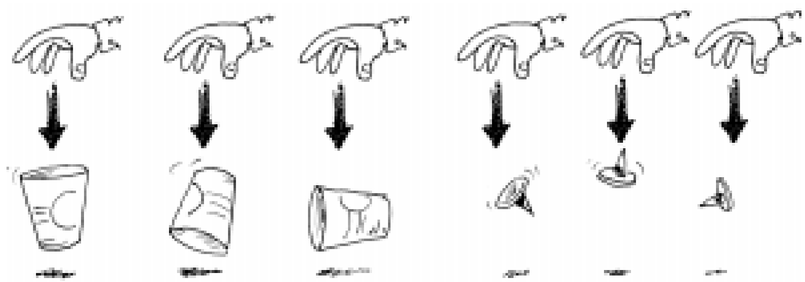
Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Experimentan con fenómenos no equiprobables; registran los resultados y comparan con situaciones de equiprobabilidad.

Ejemplo A

Experimentar algunos lanzamientos con vasos de cartón o con chinches u otro objeto que no presente simetría.



I. Predecir, suponiendo un total de 30 lanzamientos, cuál será el número por cada una de las posibles formas de aterrizaje del objeto.
II. Hacer la experiencia, registrar los resultados y contrastar con la predicción.
III. Comparar los resultados obtenidos entre quienes realizaron la experiencia con el mismo tipo de objeto. Considerar la suma del total de experiencias realizadas; comparar los resultados obtenidos.
IV. Constatar cómo esta frecuencia tiende a estabilizarse en la medida en que aumenta el número de experimentos realizados.

INDICACIONES AL DOCENTE

Para desarrollar este ejemplo se puede organizar el curso en parejas de trabajo; es importante cuidar que los lanzamientos no predispongan a una forma de aterrizaje, sino que permitan cualquiera de las posibles.

Podría ser una actividad para que se desarrolle fuera de la hora de clases y trabajar durante ésta con los resultados que se obtengan.

Contrastar los resultados de esta experiencia con los generados en una con sucesos equiprobables (lanzamiento de una moneda).

Ejemplo B

Se lanza un dado 18 000 veces; se obtienen los resultados consignados en la siguiente tabla, agrupados de acuerdo al número de tiradas.

Nº de tiradas	**Resultados posibles**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
20	5	4	2	4	2	3
60	7	6	6	11	9	21
300	47	39	44	56	42	72
600	89	84	82	111	104	130
1200	174	166	185	203	207	265
2400	362	345	387	396	407	503
6000	946	885	1002	993	941	1233
18000	2911	2851	2833	2766	2806	3833

Calcular las frecuencias relativas para los datos de dos filas y de dos columnas. ¿Qué deducción se puede plantear a partir del análisis de estos resultados?

INDICACIONES AL DOCENTE

Es igualmente interesante analizar una tabla de resultados como hacer la experiencia con algún dado ‘cargado’. Alterar la simetría de un dado, limando una de sus aristas o uno de los vértices, permite proponer a los alumnos y alumnas, experiencias con sucesos no equiprobables.

En el cálculo de la frecuencia relativa considerar la columna del 6; hacer referencia a la Ley de los Grandes Números.

Ejemplo C

El cuadro que sigue registra las veces que resultó ‘cara’ en un total de 10 000 lanzamientos de una moneda. En cada celda se registra el número de veces que resultó ‘cara’ por cada 100 lanzamientos.

47	45	53	45	49	48	58	43	48	54	
41	47	52	47	50	51	60	52	46	46	
51	46	46	41	45	51	54	58	40	53	
48	52	52	51	52	49	55	51	53	55	
59	47	44	49	52	44	50	51	49	46	
51	48	51	59	48	52	48	50	49	54	
52	59	48	50	47	50	47	52	48	41	
55	57	51	55	47	46	57	50	54	48	
39	45	46	53	47	53	52	53	53	51	
41	48	54	50	51	41	55	49	45	53	

Responder las siguientes preguntas y plantear reflexiones acerca de las respuestas.

I. ¿Cuántas celdas registran 50 caras, del total de 100?
II. ¿Cuál es el número más alejado de 50?
III. ¿Cuántas veces se repite ese o esos números?
IV. Efectuar las sumas de las líneas y de las columnas y analizar esos resultados que corresponden, cada uno, a 1000 lanzamientos
V. ¿Cuál es el total de caras en los 10 000 lanzamientos?

INDICACIONES AL DOCENTE

No conviene desdeñar el estudio del comportamiento estadístico de experimentos con resultados equiprobables, justamente para tratar de discernir, en la práctica, resultados empíricos que son simples fluctuaciones estadísticas de resultados equiprobables, con resultados empíricos que provienen de un experimento con resultados no equiprobables.

El problema es inferir si una moneda que arroja 55 caras al ser lanzada 100 veces estará cargada o no. Difícilmente se puede contestar esta pregunta si no se puede estimar la probabilidad que una moneda no cargada arroje entre 45 y 55 caras al ser lanzada 100 veces.

Interesa que los estudiantes relacionen la frecuencia relativa de los resultados de una experiencia aleatoria repetida un gran número de veces, con la probabilidad, considerando tanto situaciones con sucesos equiprobables como con sucesos no equiprobables. En ambos casos hay una tendencia a la estabilización de la frecuencia relativa; en el primer caso esta frecuencia es predecible por la simetría que presenta la experiencia.

Actividad 2

Utilizan información estadística para calcular y comparar probabilidades.

Ejemplo A

Hace casi seis meses que Ana María controla el tiempo que espera el bus, cada mañana, para trasladarse a su trabajo. Organizó los datos en la tabla de frecuencia siguiente en la que t es el tiempo medido en minutos.

Tiempo	$0 \leq t < 2$	$2 \leq t < 4$	$4 \leq t < 6$	$6 \leq t < 8$	$8 \leq t < 10$	$10 \leq t < 12$	$12 \leq t < 14$
Frecuencia	7	12	29	25	22	18	14

¿Cuál es el tiempo máximo (o mínimo) que espera Ana María el bus?
Estime la probabilidad que Ana María espere entre 6 y 8 minutos.

INDICACIONES AL DOCENTE

El registro de información y la elaboración de una tabla de frecuencia permite calcular la frecuencia relativa de los tiempos de espera y estimar así la probabilidad correspondiente.

El experimento aleatorio consiste en elegir al azar una mañana de Ana María durante esos seis meses y preguntarse cuánto tiempo esperó su bus esa mañana.

Apoyándonos en lo que ocurrió en esos pasados 6 meses podemos estimar que la probabilidad de que su tiempo de espera esté entre 6 y 8 minutos será la frecuencia relativa correspondiente durante esos seis meses.

Es importante destacar las diferencias entre las características de este tipo de fenómeno con los analizados en la actividad anterior. Sin embargo, en ambos tipos de experiencia es la frecuencia relativa la que permite estimar la probabilidad de un suceso.

Tomado al pie de la letra y un poco apresuradamente, esto podría significar que si lanzamos 10 veces una moneda y obtenemos 6 caras, eso establece que la probabilidad que la moneda salga cara es 0,6.

Sin embargo sabemos que una moneda simétrica, que muestra cara con probabilidad 0,5, puede perfectamente arrojar 6 caras en diez lanzamientos.

Si estamos interesados en la probabilidad de que una moneda muestre cara al ser lanzada y sólo sabemos que salió 6 veces cara en 10 lanzamientos, podemos *estimar* -en ausencia de otra información- que la probabilidad que la moneda salga cara en un lanzamiento es 0,5. Pero también podríamos estimar que la tal probabilidad sea 0,6.

Ejemplo B

El cuadro siguiente consigna información sobre la población indígena y la población total en algunos países de América Latina, alrededor del año 1990.

País	Población total	Población indígena
Argentina	32 546 517	350 000
Chile	13 099 513	1 000 000
Ecuador	10 264 137	3 800 000
Guatemala	9 197 345	5 300 000
México	83 226 037	12 000 000
Perú	21 588 181	9 300 000

Fuente: “Mujeres Latinoamericanas en cifras”. Instituto de la mujer, Ministerio de Asuntos Sociales de España y Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales, FLACSO. 1995

¿En cuál de estos países es mayor la probabilidad que sea indígena una persona elegida al azar?
¿Cuál es la probabilidad en el caso de Chile?

INDICACIONES AL DOCENTE

En este caso el experimento aleatorio es elegir al azar un habitante del país en cuestión.

El desarrollo de este ejemplo permite establecer relaciones entre la noción de probabilidades y la frecuencia relativa que se genera por acumulación intencionada de información sobre algún tema.

Conviene comentar con los estudiantes el sentido de la expresión ‘elegir al azar’ y relacionar con la secuencia de números que aparecen en la pantalla de una calculadora científica que tenga la tecla ‘random’.

Ejemplo C

Para decidir sobre distribución presupuestaria, se consideró la información que consigna el cuadro que sigue.

Chile Año	**Población**		
	Total	Infantil 0 - 14 años	Adulta mayor 65 años y más
1970	8 884 768	3 481 142	446 711
1982	11 329 736	3 653 113	659 517
1992	13 348 401	3 929 468	877 044

Fuente: Estadísticas de Chile en el siglo XX, Instituto Nacional de Estadísticas (INE), Santiago, 1999

¿En qué año es menor la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mayor de 65 años?
¿En qué año es menor la probabilidad de que una persona elegida al azar sea menor de 14 años?

INDICACIONES AL DOCENTE

En este ejemplo la experiencia aleatoria es elegir una persona al azar y se estima la probabilidad de que ella satisfaga una determinada condición recurriendo a la frecuencia relativa.

Recoger información, organizarla e interpretarla es de vital importancia para la toma de decisiones en diversos y múltiples ámbitos. Muchas decisiones no se sustentan en información censal sino muestral, tema que será estudiado en Cuarto Año Medio.

Actividad 3

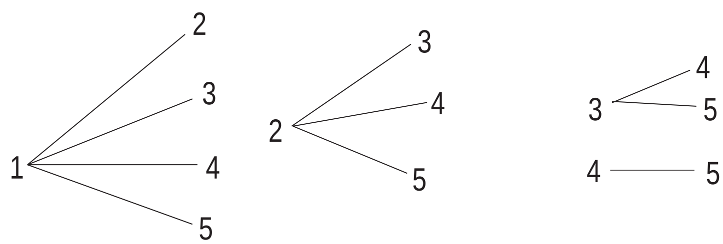
Resuelven problemas relativos al cálculo de probabilidades que incorporan combinatoria básica; discriminan los casos que involucran 'orden' de aquellos que no lo consideran y aquellos en los que se permite o no 'la repetición'.

Ejemplo A

Para juntar fondos el curso organiza una rifa. Para participar se compran unas papeletas que tienen dos números diferentes, del 1 al 5. Gana quien tenga la papeleta con los dos números sorteados.
¿Cuál es la probabilidad de ganar, teniendo una papeleta?

INDICACIONES AL DOCENTE

Es fácil la representación de este ejemplo en un diagrama como el siguiente: una adaptación del árbol de conteo para que quede sólo una vez cada par de números. Como el orden no tiene importancia, se ha dejado un sola de las duplas: está 1, 3 pero no está la dupla 3, 1, por ejemplo.



También se puede considerar un cuadro de doble entrada en el que se marcan sólo uno de los pares de duplas.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1		1 ; 2	1 ; 3	1 ; 4	1 ; 5
2			2 ; 3	2 ; 4	2 ; 5
3				3 ; 4	3 ; 5
4					4 ; 5
5					

Son diez las duplas igualmente posibles y distintas; la probabilidad de ganar con una papeleta es $\frac{1}{10}$.

Ejemplo B

Calculan la probabilidad de ganar un juego de azar en el que haya que elegir una cierta cantidad de números de un total.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante tener en cuenta que en estos juegos no importa el orden en que salen los números sorteados los que, además, no se repiten.

Ejemplo C

La Municipalidad de Aguas Cristalinas está autorizada para diseñar patentes usando las letras W, X, y Z y todos los dígitos. Si las patentes tienen dos letras y dos números y se puede repetir la letra o el número, ¿cuántas patentes distintas se pueden diseñar? ¿Cuál es la probabilidad de tener una patente con dos números iguales?

INDICACIONES AL DOCENTE

El diagrama de árbol es una buena ayuda para el conteo de todos los casos posibles. Es conveniente que los estudiantes lleguen a expresar generalizaciones a partir del análisis de ejemplos con menos números, recurriendo a la evidencia que aporta el diagrama de árbol.

Actividad 4

Realizan experimentos y resuelven problemas que involucran adición de probabilidades.

Ejemplo A

Lanzar una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 'cara' **o** 'cinco'?

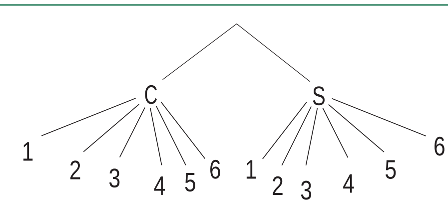
INDICACIONES AL DOCENTE

Un cuadro de doble entrada como el siguiente puede utilizarse para recoger la información en el caso que se realice la experiencia, o bien para el conteo de los casos posibles y los favorables.

Resultados moneda	**Resultados del dado**					
	1	2	3	4	5	6
Cara						
Sello						

Es importante que los alumnos y alumnas analicen el caso en que se obtiene 'cara' y 'cinco' en un lanzamiento que es también un caso favorable.

En este ejemplo, el árbol de posibilidades es también una buena representación para visualizar los casos posibles y los favorables.



Ejemplo B

Lanzar simultáneamente dos monedas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en por lo menos una de ellas?

INDICACIONES AL DOCENTE

En este ejemplo, algunos alumnos y alumnas pueden plantear que la solución está dada por los resultados, 'cara-sello y sello-cara' desestimando el resultado 'cara-cara'. Asimismo, otros podrán calcular por exclusión: es cuando no sale 'sello-sello'.

Es importante considerar representaciones para visualizar los resultados posibles.

Un cuadro de doble entrada puede ser una buena representación.

	Cara	**Sello**
Cara	C-C	C-S
Sello	S-C	S-S

Con esta herramienta se evita la confusión presente en el cálculo de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ en el que se considera que la probabilidad de que salga cara al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$ y, como en este caso son dos monedas, la probabilidad sería, erróneamente, la suma.

Ejemplo C

Se organiza un sorteo en el que participan los números del 1 al 500. Gana quien tenga un número múltiplo de 4 o uno múltiplo de 6. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

INDICACIONES AL DOCENTE

Este ejemplo aporta al análisis de las situaciones en las que se presenta intersección: un mismo número satisface ambas condiciones.

Interesa que los alumnos y alumnas se den cuenta que el 12 y los múltiplos de 12 son a la vez múltiplos de 4 y de 6; es necesario contarlos una sola vez. Se podrían armar juegos competitivos de unos múltiplos contra otros.

Actividad 5

Realizan experimentos y resuelven problemas que involucran la multiplicación de probabilidades; discriminan sucesos dependientes.

Ejemplo A

Lanzar una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener ‘sello’ y ‘tres’ ?

INDICACIONES AL DOCENTE

Un cuadro como el siguiente ayuda a recoger la información cuando se hace la experiencia.

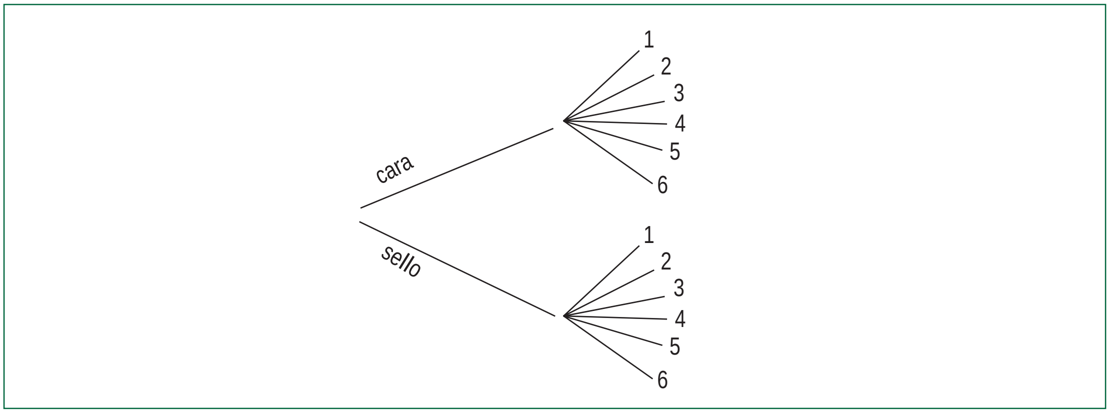
Resultados	**Resultados del dado**					
moneda	1	2	3	4	5	6
Cara						
Sello						

Para el cálculo de la probabilidad puede ser adecuado una tabla como la siguiente:

Dados / Monedas	**1 - 2 - 4 - 5 - 6**	**3**	**Total de casos**
Cara	5	1	6
Sello	5	1	6
Total de casos	10	2	12

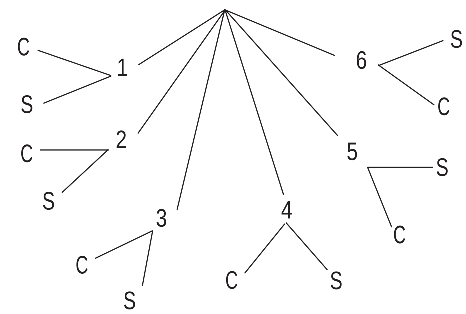
De acuerdo a esta tabla, la probabilidad de obtener ‘sello y 3’ es igual a $\frac{1}{12}$.

También se puede utilizar un diagrama de árbol como el que sigue:



Es importante que los alumnos y alumnas visualicen que la probabilidad de obtener 'sello y 3' está dada por el producto $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$.

Si se considera primero el dado y después la moneda, se obtiene otro árbol:

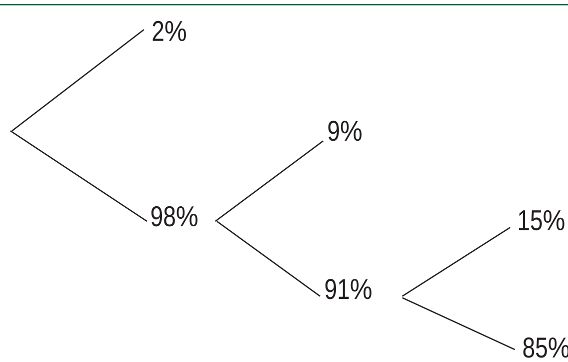


Ejemplo B

Según la información disponible, un cierto tipo de enfermo sometido a un trasplante tiene un 2% de probabilidad de sufrir una grave complicación por la anestesia; la probabilidad de que se produzcan complicaciones durante la operación es de un 9%; después de la operación, la probabilidad de complicación es de un 15%.
Determinar la probabilidad que un paciente sometido a trasplante, de acuerdo a esta información, no sufra ninguna complicación.

INDICACIONES AL DOCENTE

El diagrama de árbol que incluye las probabilidades es una herramienta que ayuda a encontrar la solución al problema propuesto, tal como se ilustra en el dibujo que sigue; la línea ennegrecida indica la secuencia de eventos que lleva a la solución al problema.



En este ejemplo, 0,76 aproximadamente, es la probabilidad de no tener complicaciones.

Ejemplo C

Calcular la probabilidad de sacar una carta menor que 3 y roja, de una baraja de naipe inglés.

INDICACIONES AL DOCENTE

El cuadro que sigue permite hacer el análisis de la situación:

	Número de carta		Total de casos
Color	**$x < 3$**	**$x \geq 3$**	
Rojo	4	22	26
Negro	4	22	26
Total de casos	8	44	52

Son 4 las cartas rojas y menores que 3 a la vez, sobre un total de 52.

En consecuencia, la probabilidad de sacar una carta que cumpla con las condiciones pedidas es $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Analizado los eventos en forma separada:

I. la probabilidad de sacar una carta menor que 3 es $\frac{8}{52}$,

II. la probabilidad de sacar una carta roja es $\frac{1}{2}$.

La probabilidad que satisfaga ambas condiciones también se puede obtener calculando el producto de la probabilidad de cada suceso obtenida en forma separada. En este caso $\frac{8}{52} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

En forma similar al ejemplo anterior se puede apoyar el análisis con un diagrama de árbol.

Ejemplo D

Calcular la probabilidad de que salga par y menor que 4 al lanzar un dado.

INDICACIONES AL DOCENTE

Interesa que los estudiantes comprendan la diferencia entre este ejemplo y los anteriores. En este caso no coincide el cálculo con el producto de las probabilidades de ambos sucesos obtenida en forma separada. Esto es así porque son dos sucesos dependientes.

	Intervalo del resultado		
Paridad del resultado	**x < 4**	**x ≥ 4**	**Total de casos**
Par	1	2	3
Impar	2	1	3
Total de casos	3	3	6

Probabilidad que salga par es $\frac{1}{2}$

Probabilidad que salga menor que 4 es $\frac{1}{2}$

Probabilidad que salga par y menor que 4 es $\frac{1}{6}$, resultado que deriva del análisis de la tabla y que es diferente del producto $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ calculados en los dos ejercicios anteriores.

Ejemplo E

En una clínica médica se ha organizado un archivo de los pacientes por sexo y por tipo de hepatitis. Son 45 varones de los cuales 25 tienen hepatitis tipo A y 20, tipo B. Son 35 mujeres con hepatitis tipo A y 20 con hepatitis tipo B.

Si se selecciona una de las fichas del archivo al azar, determinar la probabilidad de sacar:

I. Una correspondiente al sexo femenino.

II. Una correspondiente a un caso de hepatitis tipo B.

III. Una correspondiente al sexo masculino y con hepatitis tipo A.

IV. La respuesta anterior, ¿es igual al producto de las probabilidades de ambos sucesos calculados independientemente?

INDICACIONES AL DOCENTE

La comparación entre la probabilidad de la ocurrencia de dos sucesos simultáneos con el producto de la probabilidad de cada uno de ellos calculados separadamente se transforma en un test para determinar la independencia o dependencia de ambos sucesos.

Actividad 6

Calculan probabilidades condicionadas en situaciones sencillas.

Ejemplo A

Comparar las dos situaciones que siguen

a. Primera situación

a.1 Calcular la probabilidad que salga as al lanzar el dado y cara al lanzar la moneda.

a.2 Calcular la probabilidad que salga as al lanzar el dado, sabiendo que ya salió cara al lanzar la moneda.

b. Segunda situación

b.1 ¿Cuál es la probabilidad que salga par y menor que 4 al lanzar un dado?

b.2 Sabiendo que ya salió par , ¿cuál es ahor a la pr obabilidad que sea menor que 4?

INDICACIONES AL DOCENTE

En la primera situación los sucesos son independientes en tanto que la segunda es un caso de probabilidad condicionada en la que los sucesos son dependientes.

Las siguientes tablas que ordenan el número de casos pueden contribuir al análisis de ambas situaciones.

Primera situación

Dados / Monedas	2 - 3 - 4- 5- 6	As	Total de casos
Cara	5	1	6
Sello	5	1	6
Total de casos	10	2	12

Probabilidad que salga cara es $\frac{1}{2}$.

Probabilidad que salga as es $\frac{1}{6}$.

Probabilidad que salga cara y as es $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ lo que es coherente con la información de la tabla.

Probabilidad que salga as, sabiendo que ya salió cara sigue siendo $\frac{1}{6}$; no varía por la información 'ya salió cara'.

Segunda situación

Considerar la indicación dada para el ejemplo D de la actividad 5. En consecuencia, la probabilidad que salga par sabiendo que salió un número menor que 4 es $\frac{1}{3}$.

Ejemplo B

Se lanzan dos dados, uno blanco y uno rojo.

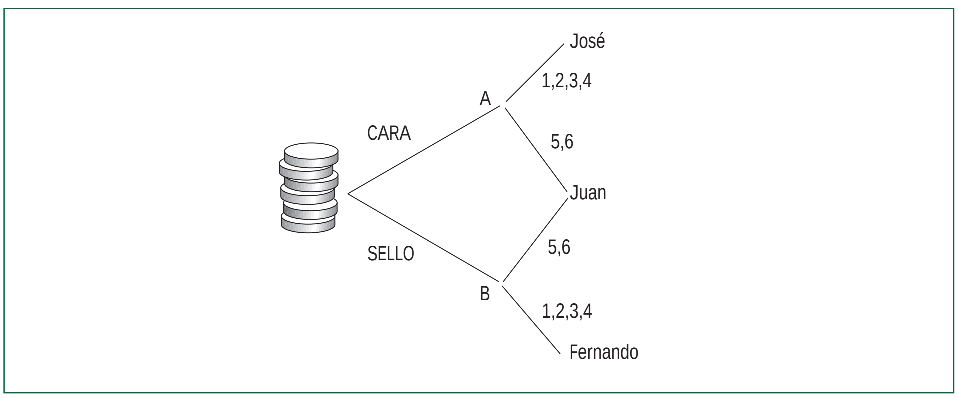
I. Calcular la probabilidad que la suma de los puntos sea igual a 10.
II. Calcular la probabilidad que la suma de los puntos sea igual a 10, si se sabe que en el dado rojo salió 6.
III. Calcular la probabilidad que la suma de los puntos sea igual a 10, si se sabe que en el dado rojo salió 3.

INDICACIONES AL DOCENTE

Lo importante en este ejemplo es destacar cómo influye en el cálculo de probabilidades el conocimiento de más información pertinente.

Ejemplo C

Entre tres amigos inventan un juego que se puede graficar de la siguiente manera.



Disponen de un determinado número de fichas; lanzan una moneda: si sale cara la ficha pasa a A, si sale sello a B. En seguida lanzan un dado: si sale 5 ó 6 las fichas van donde Juan; si las fichas están en A y sale 1, 2, 3, ó 4 las fichas van donde José; si estaban en B van donde Fernando.

I. ¿Es equitativo este juego?
II. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Juan?
III. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane una ficha si salió cara?
IV. ¿Cuál es la probabilidad de que Fernando gane una ficha si salió cara?

INDICACIONES AL DOCENTE

Variar las condiciones del juego para enriquecer el análisis.

Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada uno de ellos se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar lo realizado por los estudiantes.

Estos indicadores son concordantes con los siguientes criterios de evaluación, ya descritos en la Presentación de este programa:

- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios.

Actividad 1

Resuelven problemas que involucran el cálculo de probabilidades incorporando combinatoria básica.

Ejemplo A

Para la reunión de la Organización Internacional del Trabajo (OIT), se invitará a participar a un par de dirigentes nacionales de los trabajadores. De acuerdo a los datos del cuadro siguiente, ¿en cuál de estos países hay mayor probabilidad que en la delegación participe una mujer, suponiendo una selección al azar?
¿Cuál es la probabilidad que asistan dos mujeres de un mismo país?

País	Año	Total de dirigentes	Dirigentes mujeres	Organización
Argentina	1994	24	0	Confederación General del Trabajo
Bolivia	1994	37	1	Central Obrera Boliviana
Chile	1992	59	5	Central Unitaria de Trabajadores
México	1991	47	2	Confederación de Trabajadores de México
Uruguay	1993	17	3	Plenario Intersindical de Trabajadores -Convención Nacional de Trabajadores

Fuente: "Mujeres Latinoamericanas en cifras". Instituto de la mujer, Ministerio de Asuntos Sociales de España y Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales, FLACSO. 1995.

Observar si:

I. *Calculan la probabilidad en todos los casos;*

II. *Hacen una selección y disminuye los cálculos.*

Ejemplo B

Calcular cuántos números de tres cifras se pueden construir considerando los dígitos del 3 al 7, ambos incluidos. Considerar la posibilidad de repetir cifra y de no repetirla. Calcular la probabilidad de elegir desde una caja en que estén todos esos números, aquéllos que tienen todos sus dígitos iguales.

Observar si:

I. *Discriminan la repetición de cifra, de la no repetición;*

II. *Calculan la probabilidad.*

Actividad 2

Resuelven problemas que involucran operatoria con probabilidades.

Ejemplo A

Un jugador de básquetbol tiene un registro de 72% de aciertos en los tiros libres. Si en un partido tiene que lanzar dos veces al aro, ¿cuál es la probabilidad que acierte en ambos lanzamientos?

Observar si:

I. *Se apoyan en un dibujo o esquema;*

II. *Multiplican las probabilidades de acierto.*

Ejemplo B

La información del Instituto Nacional de Estadística (INE) señala que en el año 1990, la población en Chile era de 13 099 513 habitantes; en ese mismo año la fuerza de trabajo era de 4 805 762 personas.
¿Cuál es la probabilidad en ese año de que al seleccionar una persona al azar, ésta pertenezca a la fuerza de trabajo?
Si la tasa de participación de la mujer en la fuerza de trabajo era de 30,5%, y el total de mujeres era de 6 627 601, ¿cuál es la probabilidad, en ese año de que al seleccionar una persona al azar, ella sea mujer y pertenezca a la fuerza de trabajo?

Actividad 3

Resuelven problemas que involucran probabilidad condicionada.

Ejemplo A

En una baraja de cartas, determinar la probabilidad de sacar un siete sabiendo que es una carta roja.
En esta situación ¿los sucesos considerados son dependientes o independientes?

Observar:

I. A qué recurren para analizar los datos;
II. Si responden a partir de los datos de la tabla;
III. Si responden multiplicando las probabilidades de cada suceso;
IV. Si reconocen la independencia de los sucesos.