



# Matemática

## Programa de Estudio Tercer Año Medio



GOBIERNO DE CHILE  
MINISTERIO DE EDUCACION

Matemática  
Programa de Estudio, Tercer Año Medio, Formación General  
Educación Media, Unidad de Curriculum y Evaluación  
ISBN 956-7933-56-1  
Registro de Propiedad Intelectual N° 116.760  
Ministerio de Educación, República de Chile  
Alameda 1371, Santiago  
[www.mineduc.cl](http://www.mineduc.cl)  
Octubre de 2000

Santiago, octubre de 2000

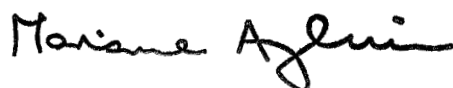
Estimados profesores:

EL PRESENTE PROGRAMA DE ESTUDIO de Tercer Año Medio de la Formación General ha sido elaborado por la Unidad de Curriculum y Evaluación del Ministerio de Educación y aprobado por el Consejo Superior de Educación, para ser puesto en práctica, por los establecimientos que elijan aplicarlo, en el año escolar del 2001.

En sus objetivos, contenidos y actividades busca responder a un doble propósito: articular a lo largo del año una experiencia de aprendizaje acorde con las definiciones del marco curricular de Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media, definido en el Decreto N°220, de mayo de 1998, y ofrecer la mejor herramienta de apoyo a la profesora o profesor que hará posible su puesta en práctica.

Los nuevos programas para Tercer Año Medio de la Formación General plantean objetivos de aprendizaje de mayor nivel que los del pasado, porque la vida futura, tanto a nivel de las personas como del país, establece mayores requerimientos formativos. A la vez, ofrecen descripciones detalladas de los caminos pedagógicos para llegar a estas metas más altas. Así, al igual que en el caso de los programas del nivel precedente, los correspondientes al Tercer Año Medio incluyen numerosas actividades y ejemplos de trabajo con alumnos y alumnas, consistentes en experiencias concretas, realizables e íntimamente ligadas al logro de los aprendizajes esperados. Su multiplicidad busca enriquecer y abrir posibilidades, no recargar ni rigidizar; en múltiples puntos requieren que la profesora o el profesor discierna y opte por lo que es más adecuado al contexto, momento y características de sus alumnos y alumnas.

Los nuevos programas son una invitación a los docentes de Tercer Año Medio para ejecutar una nueva obra, que sin su concurso no es realizable. Estos programas demandan cambios importantes en las prácticas docentes. Ello constituye un desafío grande, de preparación y estudio, de fe en la vocación formadora, y de rigor en la gradual puesta en práctica de lo nuevo. Lo que importa en el momento inicial es la aceptación del desafío y la confianza en los resultados del trabajo hecho con cariño y profesionalismo.



MARIANA AYLWIN OYARZUN  
Ministra de Educación

Presentación	9
Objetivos Fundamentales Transversales y su presencia en el programa	12
Objetivos Fundamentales	14
Cuadro sinóptico: Unidades, contenidos y distribución temporal	15
<b>Unidad 1: Las funciones cuadrática y raíz cuadrada</b>	16
Actividades para el aprendizaje y ejemplos	19
Actividades para la evaluación y ejemplos	48
<b>Unidad 2: Inecuaciones lineales</b>	54
Actividades para el aprendizaje y ejemplos	57
Actividades para la evaluación y ejemplos	72
<b>Unidad 3: Más sobre triángulos rectángulos</b>	76
Actividades para el aprendizaje y ejemplos	79
Actividades para la evaluación y ejemplos	92
<b>Unidad 4: Otro paso en el estudio de las probabilidades</b>	98
Actividades para el aprendizaje y ejemplos	102
Actividades para la evaluación y ejemplos	117
Bibliografía	121
Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios	
Primer a Cuarto Año medio	123



## Presentación

EL PROGRAMA DE ESTUDIO para Tercer Año Medio continúa con el proceso de construcción y adquisición de habilidades intelectuales, en especial las relativas a procesos de abstracción y generalización, formulación de conjeturas, proposición de encadenamientos argumentativos y la utilización y análisis de modelos que permitan describir y predecir el comportamiento de algunos fenómenos en diversos contextos.

Para modelar problemas y situaciones en que las funciones lineales estudiadas en Segundo Año Medio son insuficientes, se estudian las funciones cuadráticas, considerando su representación gráfica, la relación entre estas representaciones y los parámetros en su expresión algebraica, el tipo de crecimiento que modela y las soluciones de la ecuación que se le pueden asociar.

Con el propósito de representar o modelar algunas situaciones de comparación, se estudian las inecuaciones y los sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita, enfatizando el tipo de solución que se obtiene y estableciendo la diferencia con las ecuaciones ya estudiadas en los años anteriores.

El tema de funciones se amplía con el inicio del estudio de las funciones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos rectángulos. En Cuarto Año Medio, se continuará con el estudio de las funciones exponencial, logarítmica y potencia.

Además, este año se amplía y profundiza el tema de las probabilidades iniciado en Segundo Año Medio, incorporando el estudio de experiencias aleatorias con resultados no equiprobables y la aproximación intuitiva a la Ley de los Grandes Números.

### Organización del programa

Este programa se estructura, en concordancia con los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios, en las cuatro unidades siguientes:

- Unidad 1 **Las funciones cuadrática y raíz cuadrada**
- Unidad 2 **Inecuaciones lineales**
- Unidad 3 **Más sobre triángulos rectángulos**
- Unidad 4 **Otro paso en el estudio de las probabilidades**

En la elaboración de este programa se ha tenido especial cuidado de poner relevancia, en las instancias que se han considerado oportunas, las relaciones entre los temas ya estudiados en los años anteriores y los que se desarrollan durante este Tercer Año, los que, a su vez, son base para los que se estudiarán en Cuarto Año Medio.

En este sentido es interesante hacer notar que el tema de la primera unidad, **Las funciones cuadrática y raíz cuadrada**, se relaciona con todo el estudio sobre la función -lineal, afín, valor absoluto, parte entera- realizado en los años anteriores y las que se estudiarán en Cuarto Año Medio.

La segunda unidad, **Inecuaciones lineales**, está fuertemente relacionada con la resolución de ecuaciones con una incógnita en primer grado y, sin lugar a dudas, con el manejo de una operatoria algebraica básica.

La unidad **Más sobre triángulos rectángulos**, centrada en la semejanza entre triángulos rectángulos, es una prolongación del trabajo desarrollado en Primero y Segundo

Año sobre isometrías y semejanza y un primer paso hacia el estudio de la trigonometría, tema en el que nuevamente se encuentran las funciones.

Finalmente, la unidad **Otro paso en el estudio de las probabilidades**, se basa en lo estudiado en Segundo Año, para profundizar y ampliar el estudio sobre fenómenos aleatorios y abrir la posibilidad de trabajar nociones sobre estadística inferencial en Cuarto Año de Enseñanza Media.

En el desarrollo de estas unidades se sugiere incorporar, en la medida que se considere necesario, nociones básicas sobre conjuntos; su lenguaje contribuye a explicitar y graficar las soluciones de inecuaciones y a una mejor comprensión de probabilidades.

#### Organización interna de cada unidad

Cada unidad, en forma similar a los programas de Primero y Segundo Año Medio, se estructura considerando los siguientes puntos:

- Contenidos
- Aprendizajes esperados
- Orientaciones didácticas
- Actividades para el aprendizaje complementadas con ejemplos
- Actividades para la evaluación y ejemplos

A continuación se plantea una breve descripción de cada uno de estos elementos.

#### CONTENIDOS

Los contenidos corresponden a los señalados en el marco curricular. Con el propósito de enfatizar y/o clarificar algunos de ellos se han desglosado en contenidos más específicos.

Es necesario dejar establecido que la palabra contenidos, en este enfoque curricular, incorpora lo conceptual y

procedimental; el desarrollo de habilidades, disposiciones y actitudes.

#### APRENDIZAJES ESPERADOS

Expresan las capacidades y competencias que se busca que los alumnos y alumnas logren, considerando los contenidos de cada unidad y los objetivos fundamentales para el año escolar. Su número es variable por unidad.

Los aprendizajes esperados orientan el proceso pedagógico y dan una dirección al proceso de aprendizaje. En consecuencia, son determinantes para definir los criterios de evaluación.

#### ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

En este punto se precisan los focos de la unidad; se incorporan comentarios pedagógicos relativos al aprendizaje del tema y sus relaciones intramatemáticas.

#### ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE Y EJEMPLOS

Las actividades explicitan acciones y procesos que importa e interesa que vivan los alumnos y las alumnas para el logro de los aprendizajes esperados. No existe una correspondencia biunívoca entre los aprendizajes esperados y las actividades; una actividad puede estar al servicio de varios aprendizajes esperados; además, la dinámica que se dé en el desarrollo de la clase puede favorecer más a unos que a otros.

Para la realización de cada actividad se sugieren ejemplos que pueden ser implementados tal cual se propone en el programa, adaptados a la realidad escolar o sustituidos por otros que se consideren más pertinentes. Al hacer estas adecuaciones locales hay que procurar el desarrollo de las habilidades de pensamiento que el programa promueve.

Para numerosas actividades, los ejemplos seleccionados se ordenan según nivel de difi-

cultad; todos los ejemplos se complementan con comentarios pedagógicos específicos.

#### **ACTIVIDADES PARA LA EVALUACIÓN Y EJEMPLOS**

La evaluación se considera parte del proceso de aprendizaje. Debe proveer al joven y al docente de la retroalimentación necesaria como referente para continuar, corregir y orientar las actividades futuras.

Es recomendable que se evalúen diversos aspectos del proceso de aprendizaje, y no sólo los resultados de los diversos ejercicios. Cobra relevancia en esta propuesta observar y evaluar el tipo de razonamiento utilizado, el método empleado, la originalidad de la o las ideas planteadas.

Al término de cada unidad se incluye un conjunto de preguntas, propuestas de trabajo y problemas, utilizables como parte de una evaluación de término de la unidad. La evaluación, en consonancia con el proceso de aprendizaje, aporta a un proceso de integración y relación entre los conceptos.

Los siguientes criterios orientan el proceso de evaluación:

- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas:  
Reconocer la o las incógnitas e interpretar las preguntas; diseñar una estrategia o plan de trabajo con los datos; establecer relaciones matemáticas entre datos, variables, incógnitas; traducirlas, representar y/o expresar en un lenguaje y simbología comprensible y adecuada; seleccionar y aplicar procedimientos; explicitar la respuesta al problema y analizar su pertinencia.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático:  
Conjeturar, relacionar, establecer conclusiones; organizar y encadenar argumentos matemáticos; demostrar propiedades;

reconocer regularidades numéricas, algebraicas, geométricas.

- Organización y estructuración de conceptos matemáticos:  
Reconocer la noción o el concepto involucrado; reconocer equivalentes y establecer relaciones con otras nociones o conceptos; generalizar, particularizar.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios:  
Seleccionar y utilizar reglas, algoritmos, fórmulas y/o formas para realizar cálculos o transformar relaciones matemáticas en otras más sencillas o más convenientes de acuerdo al contexto.

Interesa además considerar que el aprendizaje de matemática contribuye al desarrollo de habilidades en el ámbito de la comunicación: analizar e interpretar cuadros, gráficos y fórmulas, traducir de un registro a otro, registrar, describir, explicar ideas, argumentos, relaciones o procedimientos.

Finalmente, no está ajeno al aprendizaje de matemática el desarrollo de actitudes y disposiciones para el estudio y el trabajo: abordar problemas y desafíos; analizar errores; escuchar otros argumentos, analizarlos; expresar críticas fundamentadas.

## Objetivos Fundamentales Transversales y su presencia en el programa

LOS OBJETIVOS FUNDAMENTALES transversales (OFT) definen finalidades generales de la educación referidas al desarrollo personal y la formación ética e intelectual de alumnos y alumnas. Su realización trasciende a un sector o subsector específico del currículum y tiene lugar en múltiples ámbitos o dimensiones de la experiencia educativa, que son responsabilidad del conjunto de la institución escolar, incluyendo, entre otros, el proyecto educativo y el tipo de disciplina que caracteriza a cada establecimiento, los estilos y tipos de prácticas docentes, las actividades ceremoniales y el ejemplo cotidiano de profesores y profesoras, administrativos y los propios estudiantes. Sin embargo, el ámbito privilegiado de realización de los OFT se encuentra en los contextos y actividades de aprendizaje que organiza cada sector y subsector, en función del logro de los aprendizajes esperados de cada una de sus unidades.

Desde la perspectiva señalada, cada sector o subsector de aprendizaje, en su propósito de contribuir a la formación para la vida, conjuga en un todo integrado e indisoluble el desarrollo intelectual con la formación ético-social de alumnos y alumnas. De esta forma se busca superar la separación que en ocasiones se establece entre la dimensión formativa y la instructiva. Los programas están contruidos sobre la base de contenidos programáticos significativos que tienen una carga formativa muy importante, ya que en el proceso de adquisición de estos conocimientos y habilidades los estudiantes esta-

blecen jerarquías valóricas, formulan juicios morales, asumen posturas éticas y desarrollan compromisos sociales.

Los Objetivos Fundamentales Transversales definidos en el marco curricular nacional (Decreto N°220) corresponden a una explicitación ordenada de los propósitos formativos de la Educación Media en cuatro ámbitos: Crecimiento y Autoafirmación Personal, Desarrollo del Pensamiento, Formación Ética, Persona y Entorno; su realización, como se dijo, es responsabilidad de la institución escolar y la experiencia de aprendizaje y de vida que ésta ofrece en su conjunto a alumnos y alumnas. Desde la perspectiva de cada sector y subsector, esto significa que no hay límites respecto a qué OFT trabajar en el contexto específico de cada disciplina; las posibilidades formativas de todo contenido conceptual o actividad debieran considerarse abiertas a cualquier aspecto o dimensión de los OFT.

Junto a lo señalado, es necesario destacar que hay una relación de afinidad y consistencia en términos de objeto temático, preguntas o problemas, entre cada sector y subsector, por un lado, y determinados OFT, por otro. El presente programa de estudio ha sido definido incluyendo ('verticalizando'), los objetivos transversales más afines con su objeto, los que han sido incorporados tanto a sus objetivos y contenidos, como a sus metodologías, actividades y sugerencias de evaluación. De este modo, los conceptos (o conocimientos), habilidades y actitudes que este programa se propone trabajar integran

explícitamente gran parte de los OFT definidos en el marco curricular de la Educación Media.

- Los OFT de ámbito *crecimiento y autoafirmación personal* referidos al interés y capacidad de conocer la realidad y utilizar el conocimiento y la información.
- Los OFT del ámbito *desarrollo del pensamiento*, en especial los relativos a habilidades de investigación y de modelamiento matemático de situaciones y fenómenos, a través de las actividades que suponen selección y organización de información y datos; las de resolución de problemas y de pensamiento lógico, a través del conjunto de contenidos y actividades orientados al aprendizaje de algoritmos o procedimientos rutinarios, así como a la aplicación de leyes y principios, por un lado, y de generalización a partir de relaciones observadas, por otro. El desarrollo del pensamiento probabilístico contribuye a tomar decisiones fundamentadas en situaciones sociales.
- Los OFT del ámbito *persona y su entorno* referidos al trabajo, y que plantean el desarrollo de actitudes de rigor y perseverancia, así como de flexibilidad, originalidad y asunción del riesgo, y las capacidades de recibir y aceptar consejos y críticas.
- A través de los problemas a resolver matemáticamente que plantean las actividades del programa es posible ampliar el trabajo de los OFT con alumnos y alumnas a su capacidad de juicio, y la aplicación de criterios morales, a problemas del medio ambiente, económicos y sociales.

Junto a lo señalado, el programa, a través de las sugerencias al docente que explicita, invita al desarrollo de actividades pedagógicas que ponen en práctica los valores y orienta-

ciones éticas de los OFT, así como sus definiciones sobre habilidades intelectuales y comunicativas.

Además, el programa se hace cargo de los OFT de *Informática* incorporando en diversas actividades y tareas la búsqueda de información a través de redes de comunicación, empleo de software y la selección de sitios en internet.

## Objetivos Fundamentales

Las alumnas y los alumnos desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de los sistemas de inecuaciones, de la función cuadrática, de nociones de trigonometría en el triángulo rectángulo y de variable aleatoria, mejorando en rigor y precisión la capacidad de análisis, de formulación, verificación o refutación de conjeturas.
2. Analizar información cuantitativa presente en los medios de comunicación y establecer relaciones entre estadística y probabilidades.
3. Aplicar y ajustar modelos matemáticos para la resolución de problemas y el análisis de situaciones concretas.
4. Resolver desafíos con grado de dificultad creciente, valorando sus propias capacidades.
5. Percibir la matemática como una disciplina que recoge y busca respuestas a desafíos propios o que provienen de otros ámbitos.

## Unidades, contenidos y distribución temporal

### Cuadro sinóptico

Unidades			
1	2	3	4
Las funciones cuadrática y raíz cuadrada	Inecuaciones lineales	Más sobre triángulos rectángulos	Otro paso en el estudio de las probabilidades
Contenidos			
<p>a. Raíces cuadradas y cúbicas. Raíz de un producto y de un cociente. Estimación y comparación de fracciones que tengan raíces en el denominador.</p> <p>b. Función cuadrática. Gráfico de las siguientes funciones:  <math>y = ax^2</math>  <math>y = x^2 \pm a, a &gt; 0,</math>  <math>y = (x \pm a)^2 a &gt; 0</math>  <math>y = ax^2 + bx + c</math>            Discusión de los casos de intersección de la parábola con el eje x. Resolución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados y su aplicación en la resolución de problemas.</p> <p>c. Función raíz cuadrada. Gráfico de: <math>y = \sqrt{x}</math>, enfatizando que los valores de x, deben ser siempre mayores o iguales a cero. Identificación de <math>\sqrt{x^2} =  x </math>.</p> <p>d. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.</p>	<p>a. Sistemas de inecuaciones lineales sencillas con una incógnita.</p> <p>b. Intervalos en los números reales.</p> <p>c. Planteo y resolución de sistemas de inecuaciones con una incógnita. Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones.</p> <p>d. Relación entre las ecuaciones y las inecuaciones lineales.</p>	<p>a. Demostración de los teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo.</p> <p>b. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.</p> <p>c. Resolución de problemas relativos a cálculos de alturas o distancias inaccesibles que pueden involucrar proporcionalidad en triángulos rectángulos. Análisis y pertinencia de las soluciones. Uso de calculadora científica para apoyar la resolución de problemas.</p> <p>d. Comentario histórico sobre los números irracionales; tríos pitagóricos; comentarios sobre el Teorema de Fermat.</p>	<p>a. Variable aleatoria: estudio y experimentación en casos concretos. Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico.</p> <p>b. Relación entre la probabilidad y la frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Uso de programas computacionales para la simulación de experimentos aleatorios.</p> <p>c. Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades. Probabilidad condicionada.</p>
Tiempo estimado			
30 a 35 horas	20 a 25 horas.	25 a 30 horas	25 a 30 horas