Material N° 04

GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 4

UNIDAD: NÚMEROS

NÚMEROS COMPLEJOS $\mathbb{C}$

DEFINICIÓN DE LA UNIDAD IMAGINARIA

El cuadrado de un número real siempre es no negativo. Por ejemplo, no existe ningún número real x para el cual $x^2 = -1$.

Para remediar esta situación, introducimos un número llamado **unidad imaginaria**, que denotamos con **i** y cuyo **cuadrado es -1**.

$$\mathbf{i^2 = -1 \quad / \sqrt{\ }}$$

$$\boxed{\mathbf{i = \sqrt{-1}}}$$

POTENCIAS DE i

Si calculamos los valores de las potencias de i, encontramos que:

i^1	=	i	i^5	=	i	i^9	=	i
i^2	=	-1	i^6	=	-1	i^{10}	=	-1
i^3	=	$i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$	i^7	=	$-i$	i^{11}	=	$-i$
i^4	=	$i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$	i^8	=	1	i^{12}	=	1

Se tiene que $\mathbf{i^{4n} = 1}$, con $n \in \mathbb{Z}_0^+$, entonces $i^{4n+p} = i^{4n} \cdot i^p = 1 \cdot i^p = i^p$, por tanto

$$\boxed{\mathbf{i^{4n+p} = i^p}} \qquad \text{con } n \in \mathbb{Z}_0^+ \quad \text{y} \quad 0 \leq p < 4$$

OBSERVACIÓN:

* $i^0 = 1$
* La suma de cuatro potencias consecutivas de **i** es 0.
* El producto de cuatro potencias consecutivas de **i** es -1.

RAÍZ CUADRADA DE NÚMEROS NEGATIVOS

Para todo $S \in \mathrm{IR}^+$ se tiene: $\sqrt{-S} = \sqrt{(-1) \cdot S} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{S} = i\sqrt{S}$

Ejemplos:

a) $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot -1} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$

b) $\sqrt{-28} = \sqrt{28 \cdot -1} = \sqrt{28} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{4 \cdot 7} \cdot i = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} \cdot i = 2\sqrt{7}\, i$

EJEMPLOS

1. ¿Cuál(es) de las siguientes ecuaciones **no** tiene solución en los números reales?

I) $x^2 + 9 = 0$
II) $x^4 + 16 = 0$
III) $x^2 - 25 = 0$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) I, II y III

2. El número $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{-25}$ se puede representar como

A) $2 - 5i$
B) $-2 + 5i$
C) $-2 - 5i$
D) $2 + 5i$
E) -7

3. El número $\sqrt{-81} + 2\sqrt{-36} - 3\sqrt{-1} - 8i$ es equivalente a

A) 0
B) $10\,i$
C) $-10\,i$
D) $21\,i$
E) $1 + i$

4. La expresión $i^{235} + i^{29}$ equivale a

A) $i + 1$
B) $-1 + i$
C) $1 - i$
D) i
E) 0

5. La expresión $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{99} + i^{100} + i^{101}$ equivale a

A) -1
B) $-i$
C) 1
D) i
E) 0

DEFINICIÓN NÚMERO COMPLEJO ($\mathbb{C}$)

Un número de la forma z = **a** + **b**i, se llama número complejo, en donde **a** y **b** son números reales. Esta forma de representar al número complejo se le denomina forma binomial o algebraica.

Además **a** : se llama parte real del complejo z y se denota como Re(z).
b : se llama parte imaginaria del complejo z y se denota como Im(z).

Ejemplo: En el número complejo z = 3 + 5i se tiene:
Re(z) = 3 (parte real de z)
Im(z) = 5 (parte imaginaria de z)

OBSERVACIÓN:

En el complejo z = a + bi
⁕ Si b = 0, entonces z = a (**Complejo Real Puro**)
⁕ Si sólo a = 0, entonces z = bi (**Complejo Imaginario Puro**)
A la expresión binomial, también se le denomina "forma canónica" del número complejo.

IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS

Dos complejos son iguales cuando son iguales sus partes reales y también sus partes imaginarias, respectivamente.
Si z_1= a + bi y z_2 = c + di, con z_1 = z_2, entonces se cumple que a = c y b = d.

$$\boxed{a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ y } b = d}$$

EJEMPLOS

1. La parte imaginaria del complejo z = 1 - 2i es

A) -2i
B) -1
C) -i
D) 1
E) -2

2. Si z = 5i, entonces Re(z) es

A) 5
B) 5i
C) 0
D) -5
E) otro valor.

3. El valor de **x** en la igualdad 7 + 8i = y + (x + 2)i es

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

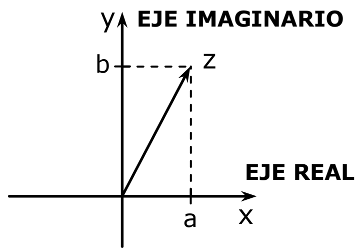
EXPRESIÓN BINOMIAL Y CARTESIANA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Cualquier número complejo a + bi también se puede considerar como un par ordenado (a, b) de números reales, donde la segunda componente del par ordenado corresponde al coeficiente de la unidad imaginaria i, entonces:

Expresión cartesiana: (a, b)

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

El complejo z = (a, b) puede ser representado en un gráfico de Argand, mediante un vector, de origen O (0, 0) y punto final P de coordenadas (a, b).

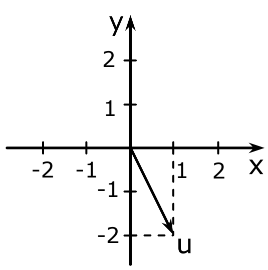


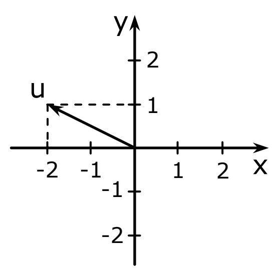
EJEMPLOS

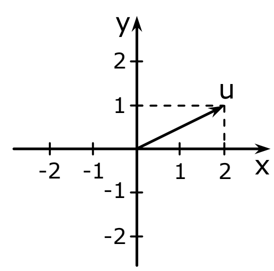
1. La expresión binomial del complejo (5, -2), está dada por

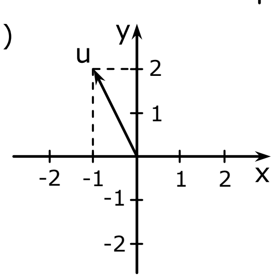
A) 5 + 2i
B) -5 − 2i
C) -2 + 5i
D) 2 + 5i
E) 5 − 2i

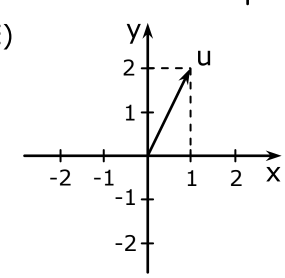
2. El complejo u = 1 − 2i está representado por

A)


B)


C)


D)


E)


ADICIÓN DE COMPLEJOS

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$.

Entonces, $\boxed{z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i}$

SUSTRACCIÓN DE COMPLEJOS

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$.

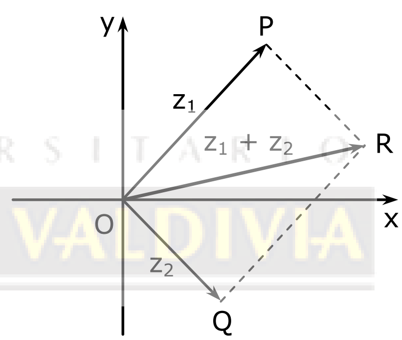
Entonces, $\boxed{z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i}$

REPRESENTACIÓN DE LA ADICIÓN O SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Dados dos números complejos z_1 y z_2:

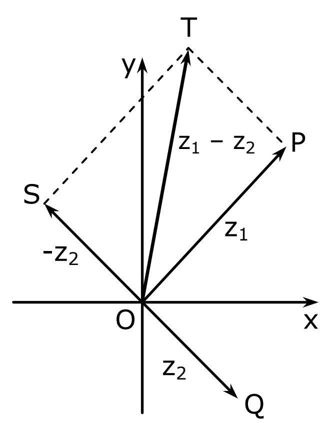
a) La adición $z_1 + z_2$ queda representada en un plano de Argand por la diagonal del paralelogramo cuyos lados son los vectores z_1 y z_2.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = z_1 \\ \overrightarrow{OQ} = z_2 \end{array}\right\} \overrightarrow{OR} = z_1 + z_2$$



b) La sustracción (resta) $z_1 - z_2$, queda representada por la suma de z_1 con el opuesto del vector z_2, $z_1 + (-z_2)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = z_1 \\ \overrightarrow{OS} = -z_2 \end{array}\right\} \overrightarrow{OT} = z_1 - z_2$$



OBSERVACIÓN:

- El neutro aditivo es el complejo (0, 0) = 0 + 0i.
- El inverso aditivo de z es -z. Si z = a + bi, entonces –z = -a – bi.

EJEMPLOS

1. Si $u = 2 + 3i$ y $v = -5 + 4i$, entonces $u + v =$

   A) $2 + 4i$
   B) $-5 + 9i$
   C) $3 + 7i$
   D) $-3 + 7i$
   E) $-10 + 12i$

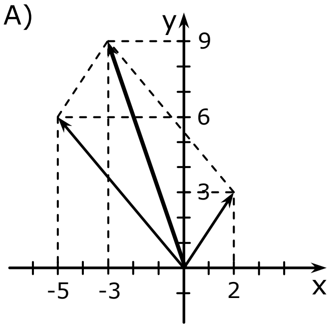
2. Si $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -4 + 5i$ y $z_3 = 3 - 4i$, entonces $z_1 + z_2 + z_3 =$

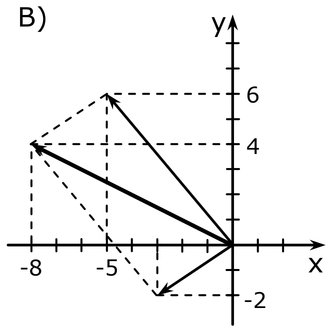
   A) $1 + 2i$
   B) $3 + 10i$
   C) $-5 + 10i$
   D) $-1 - 10i$
   E) $3 - 2i$

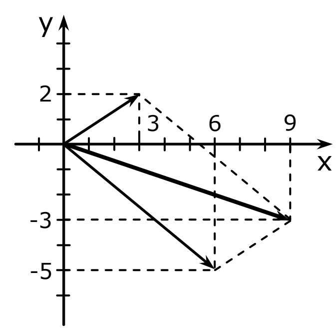
3. Sean **a** y **b** números complejos, con $a = (5, -4)$ y $b = (-6, -5)$, entonces $a - b =$

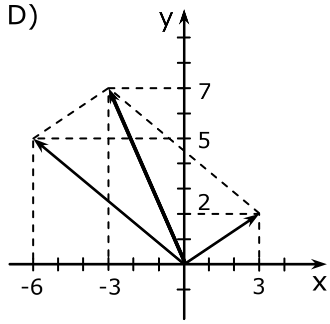
   A) $11 - 9i$
   B) $-1 - 9i$
   C) $11 + i$
   D) $-1 + i$
   E) $11 - i$

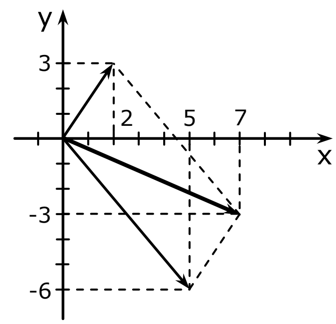
4. La suma de los complejos $u = 2 + 3i$ y $w = -5 + 6i$, respectivamente, está representada en

A)


B)


C)


D)


E)


MÓDULO O VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Si $z = a + bi$, entonces el módulo de z es $|z|$, tal que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

El módulo o valor absoluto de un complejo equivale a la longitud o magnitud del vector que representa al número complejo en el plano de Argand.

OBSERVACIÓN:

El módulo de todo complejo distinto de cero es positivo.

EJEMPLOS

1. Si $z = 5 + 12i$, entonces $|z|$ es

A) 169
B) ± 13
C) 13
D) -13
E) 17

2. Si $z_1 = -3 + 3i$ y $z_2 = 3 - 3i$, entonces $|z_1| + |z_2|$ es igual a

A) 9
B) 81
C) $3\sqrt{2}$
D) $6\sqrt{2}$
E) 0

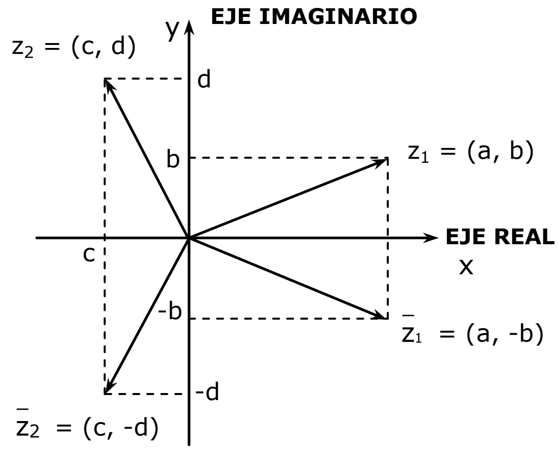
3. Si $z = 2 - 5i$, entonces $|z|^2$ es

A) 21
B) $\sqrt{21}$
C) $\sqrt{29}$
D) 29
E) 9

CONJUGADO DE UN COMPLEJO

Dos números complejos se dicen conjugados, sí solo tienen distinto el signo de la parte imaginaria. Si $z = a + bi$, entonces el conjugado de z es $\bar{z}$, tal que $\bar{z} = a - bi$.

Gráficamente, todo número complejo z y su conjugado $\bar{z}$ son simétricos respecto del eje real.



OBSERVACIÓN:

⁕ El conjugado del conjugado de un complejo, es el mismo complejo ($\bar{\bar{z}} = z$).
⁕ Los módulos o valores absolutos de z, $\bar{z}$, -z y $-\bar{z}$ son iguales.

EJEMPLOS

1. El conjugado del complejo 7 + 3i es

   A) -7 + 3i
   B) 7 − 3i
   C) -7 − 3i
   D) 7 + 3i
   E) 3 − 7i

2. El conjugado del conjugado del complejo, z = -4 − 9i es

   A) -4 − 9i
   B) 4 + 9i
   C) -4 + 9i
   D) 4 − 9i
   E) 6 + 9i

3. El conjugado del complejo z representado en la figura 1 es

   A) -2 + i
   B) -2 − i
   C) 2 + i
   D) 2 − i
   E) 1 + 2i

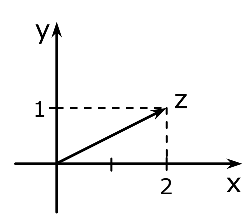


fig. 1

MULTIPLICACIÓN DE COMPLEJOS

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di)$	multiplicando los binomios.
$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci + bdi^2$	reordenando y reemplazando i^2 por (-1).
$z_1 \cdot z_2 = ac + bd(-1) + adi + bci$	factorizando por i.
$\mathbf{z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i}$	Notación binomial para la multiplicación de dos números complejos.
$\mathbf{z_1 \cdot z_2 = (ac - bd, ad + bc)}$	Notación cartesiana para la multiplicación de dos números complejos.

OBSERVACIÓN

El neutro multiplicativo es el complejo (1, 0) ó $1 + 0i = 1$

EJEMPLOS

1. Si $u = 3 - 2i$ y $v = 2 + i$, entonces $u \cdot v =$

   A) $8 + i$
   B) $6 + i$
   C) $8 - i$
   D) $4 + i$
   E) $6 - 2i$

2. **z** y **w** son números complejos con **z** = (7, 4) y **w** = (1, -2), entonces **z · w** =

   A) (1, -10)
   B) (-1, -10)
   C) (15, -18)
   D) (15, -10)
   E) (7, -8)

3. Si $a = 2 - 3i$ y $b = 5 - i$, entonces el valor de $a \cdot \bar{b}$ es

   A) $14 + 5i$
   B) $13 - 13i$
   C) $7 - 17i$
   D) $13 - 17i$
   E) $10 - 3i$

4. Si $p = 1 - i$, $q = 5 + i$ y $r = 3 - i$, entonces $p(q - r) =$

   A) $2 + i$
   B) $2 - 2i$
   C) $-6 - 2i$
   D) 4
   E) 0

RECÍPROCO DE UN COMPLEJO

Sea $z = a + bi$, entonces el recíproco de z es $z^{-1} = \frac{1}{z}$ o $z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$.

Para racionalizar el denominador de un complejo, debe amplificarse por su conjugado:

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 - (bi)^2} = \frac{a - bi}{a^2 - b^2i^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Por tanto, $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}$ (Notación binomial)

$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$ (Notación cartesiana)

OBSERVACIÓN:

El elemento (0, 0) no tiene inverso multiplicativo.

EJEMPLOS

1. Si $z = 1 + i$, entonces $z^{-1} =$

A) $-1 - i$
B) $1 - i$
C) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
D) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
E) ninguna de las anteriores.

2. El recíproco o inverso multiplicativo de $z = 3 + 4i$ es

A) $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
B) $\left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right)$
C) $\left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{5}\right)$
D) $\left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right)$
E) $(-3, -4)$

DIVISIÓN DE COMPLEJOS

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, con z_2 distinto de cero, entonces el resultado de la división $\frac{z_1}{z_2}$ se obtiene amplificando por el conjugado de z_2:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

EJEMPLOS

1. El valor de $\frac{4 + 5i}{i}$ es

A) $5 + 4i$
B) $-5 + 4i$
C) $5 - 4i$
D) $4 + 5i$
E) $-4 - 5i$

2. Sean $u = 3 + i$ y $v = 1 - i$, entonces $\frac{u}{v} =$

A) $2 + 2i$
B) $1 - i$
C) $4 + 4i$
D) $2 - 2i$
E) $1 + 2i$

3. Sean $a = 4 + 3i$ y $b = 3 + i$, entonces $\frac{a}{b} =$

A) $\frac{4}{3} + 3i$
B) $\frac{9}{10} + \frac{5}{10}i$
C) $\frac{15}{10} - \frac{13}{10}i$
D) $\frac{9}{10} + \frac{7}{10}i$
E) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

RESPUESTAS

Págs. \ Ejemplos	1	2	3	4	5
2	D	B	B	E	D
3	E	C	E		
4	E	A			
6	D	A	C	A	
7	C	D	D		
8	B	A	D		
9	C	D	B	D	
10	D	B			
11	C	E	E		